



ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ავტორი: დავით კვეკვეცია

**ვინერის პროცესის წარმოდგენები თითქმის ნამდვილად თანაბრად
კრებადი მწკრივის სახით.**

ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის
დეპარტამენტი

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

ხელმძღვანელები: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორები

ბადრი მამფორია, ბესარიონ დოჭვირი

თბილისი 2020წ

სარჩევი

ანოტაცია	3
1. შესავალი	4
2. შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის კრებადობის სახეები და კავშირი მათ შორის.....	6
3. ვინერის პროცესის განსაზღვრება.....	11
4. ვინერის პროცესის თითქმის ნამდვილად (თ. ნ) თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით წარმოდგენა ჰაარის ორთონორმირებული ბაზისის გამოყენებით.....	13
5. ბანახის სივრცეში შემთხვევითი ელემენტის ცნება. ვინერის პროცესი როგორც შემთხვევითი ელემენტი $C[0,1]$ სივრცეში.....	20
6. იტო-ნისიოს თეორემა, გამოყენება ვინერის პროცესის თ. ნ. თანაბრად კრებადი მწკრივის საით წარმოსადგენად $L_2[0,1]$ -ის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისისთვის.....	22
7. განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტის ცნება, წარმოდგენადობის პრობლემა.....	27
8. დასკვნა.....	28
9. გამოყენებული ლიტერატურა	29

ანოტაცია

ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ ვინერის პროცესი, ტესელსკის თეორემით დავამტკიცოთ, რომ არსებობს მისი შესაბამისი შემთხვევითი ელემენტი $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში, ანუ, განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტი

$$T: C[0,1]^* \rightarrow L_2(\Omega, B, P), T\delta_t = W_t$$

-წარმოდგენადია. შემდეგ, იტო- ნისიოს თეორემის გამოყენებით, დავამტკიცოთ, რომ ვინერის პროცესი წარმოიდგინება $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში, $L_2[0,1]$ -ის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისისთვის, თითქმის ნამდვილად თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით.

Our aim is to define Wiener's process, to prove by Tessel'sky theorem that there corresponds to its corresponding random element $C[0,1]$ in the Banach space, i.e., a generalized random element

$$T: C[0,1]^* \rightarrow L_2(\Omega, B, P), T\delta_t = W_t$$

-Imaginable. Then, using the Itonisio theorem, prove that

That the Wiener process is represented by $C[0,1]$ in the Banach space, for any orthonormal base of $L_2[0,1]$. Almost really evenly assembled in the form of a row.

1. შესავალი.

როგორც ცნობილია, ნაწილაკი სითხეში განიცდის ქაოტურ მოძრაობას ე. წ. ბროუნის მოძრაობას, რომელიც პირველად შეამჩნია ინგლისელმა ბოტანიკოსმა რობერტ ბროუნმა. ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი შეიქმნა 1905 წელს ა. აინშტაინის მიერ. შემდეგში 1934 წელს ნ. ვინერის მიერ განსაზღვრულ იქნა ბროუნის მოძრაობა შემდეგნაირად: მან განიხილა ორმაგი ჯამი სპეციალური დალაგებით:

$$\sum_{l=0}^N \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \xi_k(\omega) \int_0^t \sqrt{2} \sin k\pi u du,$$

სადაც $\xi_k(\omega)$, $k=1,2,\dots$ დამოუკიდებელი, სტანდარტული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა და დაამტკიცა მისი თ. ნ. თანაბარი კრებადობა ასეთი დალაგებით. შემდეგში ტესელსკიმ დაამტკიცა, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi_k(\omega) \int_0^t H_k(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

თ. ნ. t -ს მიმართ თანაბრად აბსოლუტურად იკრიბება და ჯამი არის ვინერის პროცესი იმ შემთხვევაში, როცა $H_k(t)$, $k=1,2,\dots$, ჰაარის ორთონორმირებული ბაზისია $L_2[0,1]$ ჰილბერტის სივრცეში.

შემდეგში იტომ და ნისიომ თავიანთ ცნობილ სტატიაში, რომელიც ეძღვნება ბანახის სივრცეში დამოუკიდებელი შემთხვევითი მწკრივების კრებადობის საკითხს, განიხილეს რა ვინერის პროცესი როგორც შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში, დაამტკიცეს (1.1) მწკრივის კრებადობა $L_2[0,1]$ -ის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისისთვის.

ნაშრომის პირველი პარაგრაფი ეძღვნება შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობის კრებადობის სახეებს და კავშირს მათ შორის. მეორე პარაგრაფში განსაზღვრულია ვინერის პროცესი; მესამე პარაგრაფი ეძღვნება ტესელსკის თეორემის დამტკიცებას. მეოთხე პარაგრაფში მოყვანილია იტო-ნისიოს თეორემა და ამ თეორემისა და ტესელსკის თეორემის გამოყენებით დამტკიცებულია (1.1) მწკრივის კრებადობა $L_2[0,1]$ -ის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისისთვის. ბოლო პარაგრაფში გაანალიზებულია ბანახის სივრცის ტექნიკის აუცილებლობა (1.1) მწკრივის კრებადობის დამტკიცებისთვის, შემოტანილია განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტის ცნება, განხილულია მისი წარმოდგენადობის პრობლემა და ამ ასპექტში გაანალიზებულია ჩატარებული სამუშაო.

2. შემთხვევითი სიდიდეთა მიმდევრობის კრებადობის სახეები

განსაზღვრება 2.1 (Ω, Φ, P) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდისკენ ალბათობით კრებადი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისთვის

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \text{ როცა } n \longrightarrow \infty \quad (2.1)$$

შემთხვევით სიდიდეთა ξ_n მიმდევრობის ξ შემთხვევითი სიდიდისკენ ალბათობით კრებადობა აღინიშნება ასე: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

განსაზღვრება 2.2 (Ω, Φ, P) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდისკენ თითქმის ნამდვილად (თ.ნ), ანუ 1 -ის ტოლი ალბათობით კრებადი ξ შემთხვევითი სიდიდისკენ, თუ

$$P\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1 \quad (2.2)$$

შემთხვევით სიდიდეთა ξ_n მიმდევრობის ξ შემთხვევითი სიდიდისკენ თითქმის ნამდვილად კრებადობა აღინიშნება ასე: $\xi_n \xrightarrow{\text{თ.ნ}} \xi$

განსაზღვრება 2.3 L_p კრებადობა, $(L_p(\Omega), \Phi, P)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდისკენ კრებადი L_p სივრცეში თუ

$$\left(\int_{\Omega} |\xi_i|^p dP\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \forall i\text{-სთვის}, \quad \left(\int_{\Omega} |\xi|^p dP\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ და}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\xi_n - \xi|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

თეორემა : 2.1 შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ მიმდევრობა თ.ნ. კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდესაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის

$$P\{ \omega: \sup_{m \geq n} |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon \} = 0 \quad (2.2)$$

დამტკიცება : ხდომილება $\{ \omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega) \}$ შეიძლება ასე ჩავწეროთ :

$$\{ \omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega) \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \{ \omega: |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{k} \} \quad (2.3)$$

მართლაც ხდომილება

$$A_{n,k} = \bigcap_{m \geq n} \{ \omega: |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{k} \}$$

ნიშნავს $|\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \leq k^{-1}$ უტოლობის შესრულებას, როცა $m \geq n$, $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,k}$

ხდომილება ნიშნავს ისეთი n -ის არსებობას, რომ შესრულდება $|\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \leq k^{-1}$

უტოლობა, როცა $m \geq n$, ხოლო $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ხდომილობა - ყველა k -თვის არსებობს ისეთი

n , რომ როცა $m \geq n$ შესრულებულია

$|\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \leq k^{-1}$ უტოლობა, ე.ი.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \}$$

(2.3) ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილებაა.

$$\{ \omega: \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega) \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \{ \omega: | \xi_m(\omega) - \xi(\omega) | > \frac{1}{k} \}$$

იმისთვის, რომ $P\{ \omega: \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega) \} = 0$, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ყველა k -სთვის

$$P \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} \{ \omega: | \xi_m(\omega) - \xi(\omega) | > \frac{1}{k} \} \right\} = 0 \quad (2.4)$$

ხოლო, რადგანაც

$$\bigcup_{m \geq n} \{ \omega: | \xi_m(\omega) - \xi(\omega) | > \frac{1}{k} \} = \{ \omega: \sup_{m \geq n} | \xi_m(\omega) - \xi(\omega) | \geq k^{-1} \},$$

ამიტომ (2.4)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $k \geq 1$ -თვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \omega: \sup_{m \geq n} | \xi_m(\omega) - \xi(\omega) | \geq k^{-1} \} = 0$$

რომელიც ტოლძალოვანი (2.2) რ.დ.გ

ლემა 2.2 თ.ნ კრებადობიდან გამომდინარეობს ალბათობით კრებადობა, ხოლო შებრუნებული დებულება სამართლიანი არ არის.

მართლაც

$$\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \subseteq \{\omega: \sup_{m \geq n} |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$$

შეზღუდული დებულების უარსაყოფად მოვიყვანოთ მაგალითი.

ვთქვათ, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა

$$(\Omega=[0,1], \Phi=B_{[0,1]}, P=\mu).$$

აღვნიშნოთ

$$A_n = \left(\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n+1-2^k}{2^k} \right)$$

და ვთქვათ, $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $\xi_n(\omega) = I_{A_n}(\omega)$ მიმდევრობა, რადგანაც $(0,1)$ ინტერვალში მოთავსებული ნებისმიერი ε რიცხვისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega)| > \varepsilon\} = 2^{-k}$$

ამიტომ

$$\xi_n(\omega) \xrightarrow{P} 0$$

მაგრამ ამავე დროს

$$P\{\omega: \xi_n(\omega) \not\rightarrow 0\} = 1$$

თეორმა 2.2 L_p კრებადობიდან გამომდინარეობს ალბათობით კრებადობა

დამტკიცება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} (\xi_n - \xi)^p dP \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \text{აქედან გამომდინარეობს რომ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} (\xi_n - \xi)^p dP \right) = 0 \quad \text{რადგან } \Omega \neq 0 \text{ ე.ი. აქედან გამომდინარეობს, რომ}$$

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad \text{როცა } n \longrightarrow \infty$$

3. ვინერის პროცესი

განსაზღვრება 3.1. $(\Omega, \Phi, (\Phi_t)_{t \geq 0}, P)$ არის ალბათური სივრცე (Ω, Φ, P) აღჭურვილი ფილტრაციით $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ არაკლებად სიგმაალგებრების ოჯახით, $\Phi_0 \subseteq \Phi_s \subseteq \Phi_t \subseteq \Phi$, $s < t$ რომლებიც არიან მარჯვნიდან უწყვეტები, ე.ი. $\Phi_t = \Phi_{t+}$, სადაც $\Phi_{t+} = \bigcap_{s>t} \Phi_s$.

სტოქასტური ბაზისი სრულია ან აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ პირობებს, Φ გასრულებულია P ნულოვანი სიმრავლეებით და ყველა Φ_t შეიცავს ნულოვან P ზომის სიმრავლეებს Φ -დან.

განსაზღვრება 3.2 შემთხვევითი პროცესი ესაა ოჯახი $\xi = (\xi_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ასახვებისა Ω -სი $\mathbb{R}_+$ -ში

ფიქსირებული $\omega \in \Omega$. ასახვა $t \rightarrow \xi_t(\omega)$ უწოდებენ ξ პროცესის ტრაექტორიას, ან შერჩევით ფუნქციას. შემთხვევითი პროცესი ξ მოცემულ სტოქასტურ ბაზისზე $(\Omega, \Phi, (\Phi_t)_{t \geq 0}, P)$ არის შეთანხმებული. (Φ_t შეთანხმებულია) ან ადაპტირებული, თუ ξ_t არის Φ_t ზომადი ნებისმიერი $t \geq 0$.

განსაზღვრება 3.3 ვინერის პროცესი, შემთხვევითი პროცესია რომელიც ხასიათდება შემდეგი თვისებებით

1. $W_0 = 0$ (თ.ნ)
2. ფუნქცია $t \rightarrow W_t$ თითქმის ნამდვილად უწყვეტია
3. W_t აქვს დამოუკიდებელი ნაზრდები და $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, აღნიშნავს ნორმალურ განაწილებას მათემატიკური ლოდინით μ და

დისპერსიით σ . ნაზრდების დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ თუ $0 < s_1 < t_1 < s_2$
 $< t_2 < \dots < s_n < t_n < \infty$ ნაზრდები

$$W_{t_1} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{s_2}, W_{t_n} - W_{s_n}$$

ერთობლივად დამოუკიდებელია. სინდამდვილეში ვინერის პროცესს აქვს
 დამოუკიდებელი სტაციონალური ნაზრდები, რაც ნიშნავს რომ ნებისმიერი $0 < s,$
 $t < \infty$ ნაზრდების $W_{t+s} - W_s$ განაწილება იგივეა რაც ნაზრდის $W_t - W_0 = W_t$ -ს
 განაწილება.

4. ვინერის პროცესის წარმოდგენა ჰაარის ბაზისის საშუალებით

ვინერის პროცესის ასაგებად $L_2[0;1]$ -ში გაანვიხილოთ ჰაარის ფუნქციები:

$$H_0(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$H_1(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

ზოგადად ნებისმიერი k -თვის როცა $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$ (4.1)

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n+1}{2^n} < t \leq \frac{k-2^n+2}{2^n} \\ 0, & \text{სხვაგან} \end{cases}$$

ეს ფუნქციები წარმოადგენენ სრულ ორთონორმირებულ სისტემას $L_2[0;1]$ -ში

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, H_k)(g, H_k) \quad (4.3)$$

აქ f და g არის კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციები $[0;1]$ -ზე, ხოლო ფრჩხილები ნიშნავს

სკალარულ ნამრავლს $L_2[0;1]$ -ში

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad (4.4)$$

(4.3) და (4.4) იგივეობას არ დავამტკიცებთ

ვნახოთ ჰარის ფუნქციის ერთი თვისება

ლემა 4.1

მწკრივი

$$\sum a_k \int_0^t H_k(\sigma) d(\sigma) = s(t) \quad (4.5)$$

მწკრივი თანაბრად აბსოლიტურად კრებადია თუ

$$|a_k| = O(k^\varepsilon) \quad \text{ნებისმერი } \varepsilon < 1/2$$

დამტკიცება: ადვილი სანახავია, რომ

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(\sigma) d(\sigma) \quad (4.6)$$

არაუარყოფითია, და არაღმეხება $2^{-n/2}$ ს სადაც $2^n < k < 2^{n+1}$, თუ k განსხვავებულია ან ამ ფარგლებს გარეთაა მაშინ ფუნქცია $S_k = 0$. აღნიშვნა

$$b_n = \max_{2^n \leq k \leq 2^{n+1}} |a_k|$$

მწკრივის კრებადობის შედარების ნიშნის საფუძველზე და თუ გავითავალისწინებთ

რომ ლემის პირობები შესულებულია $b_n < c 2^{\varepsilon n}$ მივიღებთ

$$\sum b_n 2^{-n} < \infty$$

აბსოლუტურად კრებადია და (4.5) კმწრვის კრებადობას ემთხვევა .

ბორელ-კანტელი ლემა. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots$ - ხდომილობებია ალბათურ სივრცეში ისეთი რომ

$$B = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

(1) - თუ $\sum P(A_n) < \infty$ მაშინ $P(B) = 0$;

(2) - თუ ხდომილობები A_n დამოუკიდებელია, ხოლო $\sum P(A_n) = \infty$ მაშინ $P(B) = 1$.

დამტკიცება: ყველა ზომას აქვს ნახევრად ადიციურობის თვისება ამიტომ

$$P(B) \leq P\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) \leq \sum_{n \geq k} P(A_n) \quad (4.7)$$

ნებისმიერი k -სთვის თუ $\sum P(A_n) < \infty$, მაშინ მარჯვენა მხარე მიისწარფის 0-კენ როცა იზრდება k . ეს ადასტურებს (1)-ს.

(2)-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ამის გადამოწმება

$$P\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) = 1$$

ნებისმიერი k - სთვის, $K \geq k$ - სთვის ჩვენ გვაქვს

$$1 - P\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) \leq 1 - P\left(\bigcup_{n=k}^K A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=k}^K [\Omega - A_n]\right) = \prod_{n=k}^K [1 - P(A_n)]$$

იმის გამო, რომ A_n ხდომილობები და შესაბამისად $\Omega - A_n$, დამოუკიდებელია. თუ

$\sum P(A_n) = \infty$ მაშინ $\prod_{n=k}^K [1 - P(A_n)]$ განსხვავდება 0-ით, როდესაც $K \rightarrow \infty$ და აქედან გამომდინარეობს (2).

ლემა 4.2 თუ $\{X_n\}$ არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეთა მიმდევრობა საშუალო 0-ით და დისპერსია 1-ით, მაშინ

$$p(|X_n| = O(\sqrt{\log n})) = 1 \quad (4.8)$$

ეს არის ზუსტად მიღებული ბორელ-კანტელი ლემიდან. თეორემის პირველი ნაწილში მიღებული შეფასება, ამიტომ დამოუკიდებლობას მნიშვნელობა არა აქვს. (დამოუკიდებელ შემთხვევაში, შეფასება შეიძლება დადასტურდეს იმავე ბორელ-კანტელის მეორე ნაწილის გამოყენებით)

დატკიცებისთვის, ჩვენ გვჭირდება მარტივი შეფასება, რომელიც ადვილად მიიღება ნაწილებითი ინტეგრებით. $x > 0$ სთვის

$$p(|X_n| \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u} du \right)$$

ვინაიდან დიდი x -ისთვის მეორე წევრს აშკარად აქვს უფრო მცირე ზრდის რიგი, ცხადია რომ

$$p(|X_n| \geq x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \quad (4.9)$$

როცა $x \rightarrow \infty$,

გვექნება

$$\sum_{n=2}^{\infty} p(|X_n| > c\sqrt{\log n}) \leq K \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{-\frac{c^2}{2}}}{\sqrt{\log n}} \quad (4.10)$$

$c > \sqrt{2}$ - სთვის მარცხენა მხარე სასრულია. ეს საკმარისია (4.8)ის დასამტკიცებლად.

თეორემა 1.

ვთქვათ $\{X_n\}$ არის დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეთა მიმდევრობა, რომელთაგან თითოეულს აქვს საშუალო 0 და დისპერსია

1. შემდეგი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \int_0^t H_n(\tau) d\tau = x_t(\omega) \quad (4.11)$$

თითქმის ნამდვილად t -ს მიმართ თანაბრად კრებადია და ჯამი წარმოადგენს ვინერის პროცესს.

დამტკიცება: (11) მწკრივის თ.ნ. კრებადობა გამომდინარეობს 4.1 და 4.2 ლემებიდან.

ასე რომ როგორც ფუნქციები $\int_0^t H_n(\tau) d\tau$, ცხადია $t=0$ -სთვის ჯამი იქნება 0. ამრიგად,

რჩება მხოლოდ (2) და (3) თვისებების შემოწმება, რომლებიც ამტკიცებენ რომ $\{x_t\}$ არის დამოუკიდებელი და ნორმალურად განაწილებული.

ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი k -სთვის

$$E(\exp[i \sum_{j=1}^k \lambda_j (x_{t_j} - x_{t_{j-1}})]) = \prod_{j=1}^k \exp(-\frac{1}{2} (t_j - t_{j-1})^2 \lambda_j^2) \quad (4.12)$$

სადაც $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ და $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ნებისმიერი რიცხვია.

(4.12) ტოლობის მარცხენა მხარე არის შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი

განაწილების ფუნქცია $(x_{t_j} - x_{t_{j-1}})$

მარჯვენა მხარეს უნდა მივიღოთ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები ლოდინით 0 და დისპერსიით 1.

დავუბრუნდეთ (4.12), ტოლობის დასამტკიცებლად, სიმარტივისთვის განვიხილოთ

$k = 2$ შემთხვევა. შემდეგ, (4.11) ტოლობის გამოყენებით

გვაქვს

$$\begin{aligned} E(\exp[i\lambda_1 x_{t_1} + i\lambda_2 (x_{t_2} - x_{t_1})]) &= E(\exp[i(\lambda_1 - \lambda_2)x_{t_1} + i\lambda_2 x_{t_2}]) = \\ &= E\left(\exp \sum_{n=0}^{\infty} X_n [i(\lambda_1 - \lambda_2)S_n(t_1) + i\lambda_2 S_n(t_2)]\right) \quad (4.13) \end{aligned}$$

რადგან X_n დამოუკიდებელია, მივიღებთ

$$\prod_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}[(\lambda_1 - \lambda_2)S_n(t_1) + \lambda_2 S_n(t_2)]^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 S_n(t_1)^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 S_n(t_1)S_n(t_2) + \lambda_2^2 S_n(t_2)]\right)$$

(4.14)

ადვილად იანგარიშება ჰარსის ფუნქციებისთვის პარსივალის უტოლობის გამოყენებით

$$\phi_s(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq s \\ 0, & s < \tau \leq 1 \end{cases}$$

შემდეგ ნებისმიერი $s_1 < s_2$ $[0, 1]$ - დან (4.3) და გამომდინარეობს

$$s_1 = (\varphi_{s_1}, \varphi_{s_2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{s_1}, H_n)(\varphi_{s_2}, H_n) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(s_1)S_n(s_2) \quad (4.15)$$

(4.15), გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია (4.14) გადავაწეროთ შემდეგნაირად

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 t_1 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 t_1 + \lambda_2^2 t_2]\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} [t_1 \lambda_1^2 + 2(t_2 - t_1)\lambda_2^2]\right)$$

ამრიგად (1.12) დადგენილია $k = 2$ ან $k = 1$

ამრიგად, ჩვენ დავინახეთ, რომ ვინერის პროცესი არსებობს $[0, 1]$ ინტერვალზე.

5. ბანახის სივრცეში შემთხვევითი ელემენტის ცნება. ვინერის პროცესი როგორც შემთხვევითი ელემენტი $C[0,1]$ სივრცეში.

ვთქვათ X ბანახის სეპარაბელური სივრცეა, X^* -მისი შეუღლებულია, $B(X)$ -ბორელის σ -ალგებრაა X -ში; (Ω, Φ, P) -ძირითადი ალბათური სივრცეა. გადასახვას $\xi: \Omega \rightarrow X$ ეწოდება ზომადი, თუ ყოველი $U \in B(X)$ -სთვის $\xi^{-1}(U) \in \Phi$.

ზომად გადასახვას ეწოდება შემთხვევითი ელემენტი.

ვთქვათ $(W_t)_{t \in [0,1]}$ სტანდარტული ვინერის პროცესია. განვიხილოთ შემთხვევითი ელემენტი $W: \Omega \rightarrow C[0,1]$, $\langle W(\omega), \delta_t \rangle = W_t(\omega)$,

სადაც $\mathcal{L} \equiv \{\delta_t, t \in [0,1], \langle f, \delta_t \rangle = f(t) \text{ არის } C[0,1]^* \text{ სივრცის ტოტალური ქვესიმრავლე (ანუ თუ } \langle f, \delta_t \rangle = 0 \text{ ყოველი } \delta_t \in \mathcal{L}, \text{ მაშინ } f = 0)\}$.

მტკიცდება, რომ W გაუსის შემთხვევითი ელემენტია $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში ($\mathcal{L}$ სიმრავლის ტოტალურობის გამო).

$\xi: \Omega \rightarrow X$ შემთხვევით ელემენტს ეწოდება სუსტი მეორე რიგის,

თუ ყოველი $x^* \in X^*$,

$$E \langle \xi, x^* \rangle^2 < \infty.$$

სუსტი მეორე რიგის შემთხვევით ელემენტს გააჩნია მათემატიკური მოლოდინი (პეტისის ინტეგრალი) $m \in X$. ასევე გააჩნია მნიშვნელოვანი მახასიათებელი---კოვარიაციული ოპერატორი

$$R: X^* \rightarrow X, \langle Rx^*, y^* \rangle = E \langle \xi - E\xi, x^* \rangle \langle \xi - E\xi, y^* \rangle.$$

ვინერის პროცესის მათემატიკური მოლოდინი არის 0, მართლაც,

$$E \langle W, \delta_t \rangle = EW_t = 0.$$

ხოლო კოვარიაციული ოპერატორი

$$R: C[0,1]^* \rightarrow C[0,1],$$

$$\langle R\phi(t), \Psi(s) =$$

$$= \iint_{0,0}^{1,1} E \langle W, \delta_t \rangle \langle W, \delta_s \rangle d\phi(t) d\psi(s) =$$

$$= \iint_{0,0}^{1,1} \min(t, s) d\phi(t) \psi(s).$$

6. იტო-ნისიოს თეორემა, გამოყენება ვინერის პროცესის თ. ნ. თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით წარმოსადგენად $L_2[0, 1]$ ჰილბერტის სივრცის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისისთვის.

ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ დამოუკიდებელი, სიმეტრიული (ξ_i და $-\xi_i$ ერთნაირად განაწილებულია) შემთხვევითი ელემენტებია X სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში. ავღნიშნოთ $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. შემდეგი თეორემა ერთ-ერთია ე.წ. იტო-ნისიოს თეორემებიდან. ჩვენ მოვიყვანთ თეორემას, რომელიც განზოგადებულია (ვ. ბულდიგინის მიერ) ტოტალური სიმრავლისათვის.

თეორემა 6.1 (იტო,ნისიო,ბულდიგინი). ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ დამოუკიდებელი, სიმეტრიული შემთხვევითი ელემენტებია X სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში. შემდეგი დებულებები ექვივალენტურია.

1. (S_n) იკრიბება თ. ნ. X -ში

2. არსებობს ისეთი შემთხვევითი ელემენტი S X -ში და ისეთი ტოტალური ქვესიმრავლე $\Gamma \subset X^*$, რომ ყოველი $x^* \in \Gamma$,

$$\langle S_n, x^* \rangle \rightarrow^P \langle S, x^* \rangle .$$

თეორემა 6.1-ის გამოყენებით დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

თეორემა 6.2. ვთქვათ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \dots$ დამოუკიდებელი, სტანდარტული, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, $e_1, e_2 \dots e_n \dots$ ორთონორმირებული ბაზისია $L_2[0,1]$ -ში, მაშინ მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad \gamma_k \quad (6.1)$$

თ. ნ. t –ს მიმართ თანაბრად იკრიბება და ჯამი არის სტანდარტული ვინერის პროცესი.

დამტკიცება. როცა $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ პაარის ბაზისია, ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ (6.1) მწკრივის თ. ნ. t -ს მიმართ თანაბრად კრებადობა ვინერის პროცესისკენ. მაშასადამე დავამტკიცეთ, რომ არსებობს ვინერის პროცესის შესაბამისი შემთხვევითი ელემენტი $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში. განვიხილოთ კერძო ჯამი

$$S_n = \sum_{i=1}^n \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad \gamma_k$$

და ტოტალური სიმრავლე

$$\Gamma \equiv \{\delta_t, t \in [0,1], \langle f, \delta_t \rangle = f(t)\} \subset C[0,1]^*.$$

ყოველი ფუნქციონალისათვის $\delta_t \in \Gamma$ -დან

$$\langle S_n, \delta_t \rangle = \sum_{i=1}^n \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad \gamma_k$$

იკრიბება ალბათობით, რადგან

$$E(\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad \gamma_k)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\int_0^t e_k(\tau) d\tau)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,t]}(\tau), e_k(\tau) \rangle^2 \rightarrow t$$

და მიღებული ჯამი ვინერის პროცესია, მართლაც

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e_k(\tau) d\tau \gamma_k\right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^s e_k(\tau) d\tau \gamma_k\right) = \\ = \langle \chi_{[0,t]}(\tau), \chi_{[0,s]}(\tau) \rangle = \min(t, s) = \langle R_W \delta_t, \delta_s \rangle, \end{aligned}$$

რაც ცალსახად განსაზღვრავს, რომ მიღებული შემთხვევითი პროცესი ვინერის პროცესია.

მაშასადამე, $C[0,1]$ სივრცეში არსებობს შემთხვევითი ელემენტი, რომლისთვისაც Γ -ტოტალური სიმრავლიდან ნებისმიერი ფუნქციონალისთვის გვაქვს (6.1) მწკრივზე ამ ფუნქციონალის მოდებისას რიცხვითი შემთხვევითი მწკრივის $L_2(\Omega, \Phi, P)$ -ში, ე. ი. ალბათობით კრებადობა ზემოთ ხსენებულ შემთხვევით ელემენტზე მოდებულ ამ ფუნქციონალის მნიშვნელობისკენ. თეორემა (6.1)-ის ძალით გვაქვს (6.1) მწკრივის კრებადობა $C[0,1]$ სივრცეში ანუ, თ. ნ. t –ს მიმართ თანაბრად კრებადობა და ჯამი არის სტანდარტული ვინერის პროცესი.

7. განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტის ცნება, წარმოდგენადობის პრობლემა.

გავაანალიზოთ იტო-ნისიოს თეორემა (თეორემა 6.1). ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ დამოუკიდებელი, სიმეტრიული შემთხვევითი ელემენტებია X სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში. ავღნიშნოთ $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_i$. ამ თეორემის თანახმად იმისათვის, რომ (S_n) იკრიბებოდეს თ. ნ. X -ში, საკმარისია არსებობდეს ისეთი შემთხვევითი ელემენტი S , X -ში, რომ ყოველი $x^* \in X^*$ -სთვის

$$\langle S_n, x^* \rangle \rightarrow^P \langle S, x^* \rangle.$$

თითქოს ელემენტარული მოთხოვნა -ერთგანზომილებიანი მწკრივის ზომით კრებადობა განაპირობებს თ. ნ. კრებადობას ბანახის სივრცეში. სინამდვილეში მთავარი მოთხოვნაა S - შემთხვევითი ელემენტის არსებობა. თვალსაჩინოებისთვის მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი:

მაგალითი 7.1. ვთქვათ $X = H$ ჰილბერტის სივრცეა, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ სტანდარტული დამოუკიდებელი გაუსის რიცხვითი შემთხვევითი სიდიდეებია, $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ ორთონორმირებული ბაზისია H -ში. განვიხილოთ კერძო ჯამი

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i.$$

H -სივრცის შეუღლებული თვით H სივრცეა. ყოველი $h \in H$ -სთვის

$$E \langle S_n, h \rangle^2 = E \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \langle h, e_i \rangle \right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \langle h, e_i \rangle^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle^2 < \infty,$$

მაგრამ არ სრულდება იტო-ნისიოს თეორემის მთავარი პირობა:

$$S \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i$$

არ არის H ჰილბერტის სივრცის ელემენტი, ანუ, მწკრივი

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i$$

არ იკრიბება H -სივრცეში:

$$E \left(\left\| \sum_{k=n}^m \gamma_k e_k \right\| \right)^2 = \sum_{k=n}^m E \gamma_k^2 = m - n.$$

ამგვარად, იტო-ნისიოს თეორემაში მთავარი მოთხოვნაა „არსებობს ისეთი შემთხვევითი ელემენტი ბანახის სივრცეში X , რომ ...“. შემთხვევითი ელემენტის არსებობის პრობლემა არის ერთ ერთი ფუნდამენტური პრობლემა უსასრულო განზომილებიანი შემთხვევითი ანალიზის პრობლემებში.

უფრო გასაგებად რომ ჩამოვაყალიბოთ ეს პრობლემა, შემოვიღოთ განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტის ცნება (ხშირად იხმარება ასევე ტერმინები „ცილინდრული შემთხვევითი ელემენტი“ ან „წრფივი შემთხვევითი ფუნქცია“):

ვთქვათ X ბანახის სეპარაბელური სივრცეა, წრფივ შემოსაზღვრულ ოპერატორს

$$T: X^* \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{B}, P)$$

ეწოდება განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტი. სასრულო განზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი მეორე რიგის შემთხვევითი ელემენტი არის ასევე განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტი და პირიქით. უსასრულო განზომილებიან სივრცეებში ნებისმიერი სუსტი მეორე რიგის შემთხვევითი ელემენტი აჩენს განზოგადოებულ შემთხვევით ელემენტს:

$$\xi: \Omega \rightarrow X, E \left\| \xi, x^* \right\|^2 < \infty$$

ყოველი $x^* \in X^*$,

$$T_\xi: X^* \rightarrow L_2(\Omega, B, P), \quad T_\xi x^* = \langle \xi, x^* \rangle$$

(T_ξ ოპერატორის შემოსაზღვრულობა გამომდინარეობს ჩაკეტილი გრაფიკის თეორემიდან), მაგრამ არა ყოველი განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტი წარმოიდგინება შემთხვევითი ელემენტის საშუალებით. განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტის წარმოდგენადობის პრობლემა სწორედ ფუნდამენტური პრობლემაა უსასრულო განზომილებიან სტოქასტურ ანალიზში. ბევრი ამოცანა სწორედ ამ პრობლემის გადაწყვეტაზე დადის. 7.1 მაგალითში თუ განვიხილავთ ოპერატორს

$$T: H \rightarrow L_2(\Omega, B, P), \quad Th = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle e_i,$$

T შემოსაზღვრული ოპერატორია, მართლაც,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|h\| \leq 1} E(Th)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle^2 = \|h\|^2 = 1,$$

მაგრამ T არ წარმოიდგინება შემთხვევითი ელემენტის საშუალებით.

დასკვნა

ჩვენ განვსაზღვრეთ ვინერის პროცესი, ტესელსკის თეორემით დავამტკიცეთ, რომ არსებობს მისი შესაბამისი შემთხვევითი ელემენტი $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში, ანუ, განზოგადოებული შემთხვევითი ელემენტი

$$T: C[0,1]^* \rightarrow L_2(\Omega, B, P), \quad T\delta_t = W_t$$

-წარმოდგენადია. შემდეგ, იტო- ნისიოს თეორემის გამოყენებით, დავამტკიცეთ, რომ მწკრივი (1.1) იკრიბება $C[0,1]$ ბანახის სივრცეში $L_2[0,1]$ -ის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისისთვის, რაც ნიშნავს თ. ნ. t -ს მიმართ თანაბრად კრებადობას. ეს საკითხი აინტერესებდათ მკვლევარებს დაწყებული თვით ნ. ვინერიდან. ბანახის სივრცის ტექნიკამ შესაძლებელი გახადა ამოცანის წარმატებით გადაწყვეტა.

ლიტერატურა.

1. Hisashi Kobayashi, Brian L. Mark and William Turin. Probability, Random Processes, and Statistical analysis. Cambridge University Press. 2012.
2. K. Ito, M. Nisio. On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. Osaka J. of Mathematics. 5(1968), 35-48.
3. Дж. Ламперти. Вероятность. Издательство “наука”. Главная редакция Физико-Математической литературы. Москва 1973.
4. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. Москва, “Наука” . Главная редакция Физико-Математической литературы. 1985. English translation. D. Reidel Publishing Co., Dordecht, 1987.