ბლანტი ბაროტროპული სითხის სტაციონარული მოძრაობა წამახვილებულ მილში

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად:

ავტორი: ეკა წულაძე

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი ნატალია ჩინჩალაძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი 2020

სარჩევი

ანოტაცია

მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში დასაბამი მიეცა წამახვილებული პრიზმული გარსების, კერძოდ, წამახვილებული ფირფიტების კვლევას, სახელდობრ, 1955 წელს ი. ვეკუამ [34]-[36] წამოჭრა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების შესწავლის საკითხი, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება (მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება ,,წამახვილებული" ფირფიტები და გარსები უწოდა). პრაქტიკაში ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორიცაა, მაგალითად, სტადიონების სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა.შ., გარდა ამისა მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). წამახვილებული ფირფიტების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიპშიცური საზღვრებით. ამავე პერიოდში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი $N+1$ წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ. N -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება $N=0,1,...$ შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. 60-იან წლებში ი. ვეკუამ [36] განავითარა ანალოგიური მათემატიკური მოდელი თხელი დამრეცი გარსებისათვის. ფირფიტებსა და გარსებთან დაკავშირებული ყველა მისი შედეგი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [34]. ი. ბაბუშკას, დ. გორდეზიანის, ვ. გულიაევის, ი. ხომას, თ. მეუნარგიას, გ. ჯაიანის, კ. შვაბის, თ. ვაშაყმაძის, ვ. ჟღენტის და სხვათა შრომები (იხ. [2], [8], [10], [4]-[6], [19], [21], [25]-[27], [32], [11] და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიეძღვნა ი. ვეკუას მოდელის შემდგომ ანალიზს. მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგ ფურიე–ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ [21].

[15]-ში შესწავლილია პარალელურ კედლებს შორის ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაბის ამოცანა. ორ პარალელურ კედელს შორის ბლანტ სითხეში მოთავსებული ცილინდრის ორგანზომილებიანი მოძრაობაა შესწავლილი [30]-ში. აღმოჩენილია, რომ როდესაც ცილინდრი ძალიან მჭიდროდ მოძრაობს ერთ – ერთი კედელის გასწვრივ, ის ყოველთვის ბრუნავს უახლოეს კედელზე კონტაქტის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით.

განხილულია სითხის მოძრაობა ცილინდრის გარეთ, ამოცანა დაიყვანება მესამე რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებებზე და ამოხსნილია მიახლოებითი მეთოდებით [37]. [29]-ში წარმოდგენილია ორ პარალელურ ფირფიტებს შორის ბლანტი სითხის მოძრაობა ლაპლასის გარდაქმნით.

სამაგისტრო ნაშრომი ეხება ბლანტი ბაროტროპული არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის დახასიათებას და ნულოვან მიახლოებაში კონკრეტული ამოცანის შესწავლას, როდესაც სითხის მიერ დაკავებული არის სისქე მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$2h^f = h_0^f x_2^\kappa + h_1^f, \quad h_0^f, h_1^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$

განხილულია შემთხვევა $h_1^f \to 0$.

$2h^f = h_0^f x_2^\kappa, \quad h_0^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$

$x_2 = 0$-ში ადგილი აქვს წამახვილებას.

Summary

In the fifties of XX century investigations of cusped elastic prismatic shells actually takesits origin, namely, in 1955 I.Vekua raisedthe problem of investigation of elastic cusped prismatic shells, whosethickness on the prismatic shell entire boundary or on its part vanishes [see [34]-[36]]. In practice, suchcusped prismatic shells, in particular, cusped plates, and cusped beams (i.e.,beams whose cross-sections area vanishes at least at one end of the beam) areoften encountered in spatial structures with partly fixed edges, e.g., stadiumceilings, aircraft wings, submarine wings etc., in machine-tool design, as incutting-machines, planning-machines, in astronautics, turbines, and in manyother application fields of engineering. Investigation of elastic cusped prismatic shells, considered as 3D ones, mayoccupy 3D domains with, in general, non-Lipschitz boundaries. The problem mathematically leads to thequestion of setting and solving of boundary value problems for even orderequations and systems of elliptic type with the order degeneration in thestatical case and of initial boundary value problems for even order equationsand systems of hyperbolic type with the order degeneration in the dynamicalcase (for corresponding investigations see the survey [19], [27] and also I. Vekua'scomments in [[34], p.86]). At the same time I.Vekua introduced a new mathematical model for elastic prismatic shells which was based on expansions of the threedimensional displacement vector fields and the strain and stress tensors in linear elasticity into orthogonal Fourier-Legendre series with respect to the variable plate thickness. By taking only the first $N+1$ terms of the expansions, he introduced the so called N-th approximation. Each of these approximations for $N = 0; 1; ...$ can be considered as an independent mathematical model of plates. In the sixties, I.Vekua developed the analogous mathematical model for thin shallow shells [36]. All his results concerning plates and shells are collected in his monograph [34]. Works of I. Babuska, D. Gordeziani, V. Guliaev, I. Khoma, A. Khvoles, T. Meunargia, C. Schwab, T. Vashakmadze, V. Zhgenti, G. Jaiani, G. Tsikarishvili, M. and G. Avalishvili, W. Wendland, D. Natroshvili, S.Kharibegashvili, N. Chinchaladze, R. Gilbert, and others are devoted to further analysis of I.Vekua's models (rigorous estimation of the modeling error, numerical solutions, etc.) and their generalizations (see, e.g., [[2], [8], [10]-[6], [19], [21], [25]-[27], [32], [11]].

[15]. The task of moving a viscous non-compressible fluid between parallel walls is studied. The two-dimensional motion of a cylinder placed in a viscous fluid between two parallel walls is studied in [30]. It is found that when the cylinder moves very tightly along one of the walls, it always rotates in the opposite direction of the contact movement on the nearest wall. The motion of liquids outside the cylinder is considered, the problem is reduced to nonlinear third-order differential equations and solved by approximate methods [37]. [29] shows the movement of a viscous fluid between two parallel plates by the Laplace transform.

The paper deals with the characterization of the motion of a viscous barotropic non-compressible fluid and the study of a specific task at near zero when the thickness occupied by the fluid is given by the following formula

$$2h^f = h_0^f x_2^\kappa + h_1^f, \quad h_0^f, h_1^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$$

Consider the case $h_1^f \to 0$.

$$2h^f = h_0^f x_2^\kappa, \quad h_0^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$$

In $x_2 = 0$ we have to do will cusped shell tipe area.

შესავალი

მეოცე საუკუნის 50-ან წლებში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას.მან შემოიღო ე.წ. N -ური მიახლოება გაშლის პირველი $N+1$ წევრის შენარჩუნებით და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება $N=0,1,\dots$ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. ი. ბაბუშკას, დ. გორდეზიანის, ვ. გულიაევის, ი. ხომას, თ. მეუნარგიას, კ. შვაბის, თ. ვაშაყმაძის,ვ. ჟღენტის, გ. ჯაიანის და სხვათა შრომები (იხ. [2], [3], [8], [7-26] და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიეძღვნა ამ მიმართულებით კვლევას.

მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგ ფურიე–ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ [21]. ზოგიერთი ამოცანა წამახვილებული ფირფიტებისა და ღეროებისათვის, რომელთა სისქე ცვალებადია, გამოკვლეული იყო მ. მახოვერის, ა. ხვოლესის, ს. მიხლინის, გ. ჯაიანის, გ. ცისკარიშვილის, ნ. ხომასურიძის, გ. დევდარიანის, ს. უზუნოვის, ს. ნაგულესვარანის, ნ. ჩინჩალაძის და ს. ხარიბეგაშვილის შრომებში (იხ. [31] და მიმოხილვები [19]-ში, [21]-ში, [27]-ში და იქვე მითითებული ლიტერატურა).

შემთხვევებს, როცა პრიზმული გარსის სისქე საზღვარზე ნულდება მიეძღვნა ე. მახოვერის, ს. მიხლინის, ა. ხვოლესის, გ. ჯაიანის, დ. ნატროშვილის, ს. ხარიბეგაშვილის, ვ. ვენდლანდის[26], გ. ჯაიანის [21], [1], ნ. ჩინჩალაძის [7], [11], (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი,ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [8]) და სხვათა შრომები. ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის, ბ. მაისტრენკოს და პ. პოდიო-გუიდულის [9] მიერ იერარქიული მოდელების ფარგლებში შესწავლილი იყო წამახვილებულ პრიზმულ სხეულებში შინაგანი შეყურსული ძალების წარმოქმნის საკითხი. შემდგომში ი. ვეკუას მეთოდის განზოგადებით განხილული იყო დრეკადი ღეროების ერთგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების აგების და გამოკვლევის საკითხები გ. ჯაიანის, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი, ვენდლანდის [26] და მ. და გ. ავალიშვილების [4]-[6] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [10]) მიერ. წამახვილებულ სტანდარტულ და პრიზმულ გარსებთან, ფირფიტებთან და ღეროებთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები დაწვრილებით არის მიმოხილული გ. ჯაიანის [25] მონოგრაფიაში.

[12] და [25]-ში განხილულია იერარქიული მოდელები ბლანტი არაკუმშვადი სითხისთვის, როდესაც სითხის მიერ დაკავებული არის ზედაპირზე ან ძაბვები (პირველი მოდელი) ან გადაადგილებებია (მეორე მოდელი) მოცემული. [12]-ში შესწავლილია დრეკადი ფირფიტებისა და სითხეების ურთიერთქმედების ამოცანები, იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში. [1]-ში განხილულია ბლანტი არაკუმშვადი სითხისა და დრეკადი წამახვილებული ფირფიტის ურთიერთქმედების ამოცანა იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში, როცა სითხეს უჭირავს უსასრულო არე, [13] ეხება ვეკუას იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში დრეკადი წამახვილებული ფირფიტის ცილინდრულ ღუნვას, რომელიც გამოწვეულია არაკუმშვადი სითხის ნაკადით.

[15]-ში შესწავლილია პარალელურ კედლებს შორის ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაბის ამოცანა.

ორ პარალელურ კედელს შორის ბლანტ სითხეში ცილინდრის ორგანზომილებიანი მოძრაობაა შესწავლილი [30]-ში. აღმოჩენილია, რომ როდესაც ცილინდრი ძალიან მჭიდროდ მოძრაობს ერთ – ერთი კედელის გასწვრივ, ის ყოველთვის ბრუნავს უახლოეს კედელზე კონტაქტის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით.

განხილულია სითხის მოძრაობა ცილინდრის გარეთ. ამოცანა დაიყვანება მესამე რიგის არაწ-

რფივ დიფერენციალურ განტოლებებზე და ამოხსნილია მიახლოებითი მეთოდებით [37]. [29]-ში წარმოდგენილია ორ პარალელურ ფირფიტებს შორის ბლანტი სითხის მოძრაობა ლაპლასის გარდაქმნით.

სამაგისტრო ნაშრომი შედგება შესავლის, ორი თავის, დასკვნისა და მითითებული ლიტერატურის ნუსხისგან.

პირველი თავი დამხმარე ხასიათისაა. აქ მოტანილია ის მასალა, რომელიც გამოყენებულია ძირითადი ამოცანის ამოსახსნელად. ამოწერილია ი. ვეკუას მეთოდით მიღებული პირველი მოდელის (პირით ზედაპირზე მოცემულია ძაბვები) შესაბამისი განტოლებათა სისტემები.

მეორე თავი თავისმხრივ, იყოფა ორ პარაგრაფად. პირველ პარაგრაფში აგებულია

არაკუმშვადი ბლანტი ბაროტროპული სითხისთვის იერარქიული მოდელები ნულოვან მიახლოებაში მეორე მოდელის ფარგლებში(პირით ზედაპირზე გადაადგილებებია მოცემული). ხოლო, მეორე პარაგრაფი მოიცავს კონკრეტული ამოცანის შესწავლას, როდესაც სითხის მიერ დაკავებული არის სისქე მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$2h^f = h_0^f x_2^\kappa + h_1^f, \quad h_0^f, h_1^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$

განხილულია შემთხვევა $h_1^f \to 0$.

$2h^f = h_0^f x_2^\kappa, \quad h_0^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$

$x_2 = 0$-ში ადგილი აქვს წამახვილებას.

1 დამხმარე მასალა

ბლანტი ბაროტროპული სითხის მოძრაობა (სტოქსის მიახლოებაში) ხასიათდება შემდეგი განტოლებებით (იხ. [25])

მოძრაობის განტოლებები

$$\rho^f \ddot{u}_i^f(x_1,x_2,x_3,t) = \sigma_{ij,j}^f(x_1,x_2,x_3,t) + \Phi_i^f(x_1,x_2,x_3,t), \qquad i=\overline{1,3} \tag{1}$$

ნიუტონის განზოგადებული კანონი

$$\sigma_{ij}^f = -\delta_{ij}p + \lambda^f \delta_{ij}\dot{\theta}^f(\dot{u}^f) + 2\mu^f \dot{e}_{ij}(\dot{u}^f), \qquad i,j=\overline{1,3} \tag{2}$$

კინემატიკური დამოკიდებულებები

$$\dot{e}_{ij}^f := \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^f + \dot{u}_{j,i}^f), \qquad i,j=\overline{1,3} \tag{3}$$

$$\dot{\theta}^f := \dot{e}_{ii}^f = \dot{u}_{i,i}^f = div\dot{u}^f, \tag{4}$$

სადაც λ^f და μ^f სიბლანტის კოეფიციენტებია, $u^f := (u_1^f, u_2^f, u_3^f)$ გადაადგილების ვექტორია, e_{ij}^f დეფორმაციის ტენზორია, σ_{ij}^f ძაბვის ტენზორია, p წნევაა, $\Phi_i \quad i=\overline{1,3}$ მოცულობითი ძალის კომპონენტებია, ρ^f სითხის სიმკვრივეა, ზედა ინდექსი f კი, მიუთითებს სითხეზე (fluid),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

კრონეკერის სიმბოლოა. $,i$ -თი აღვნიშნავთ წარმოებულს x_i ცვლადის მიმართ, ხოლო $,ij-$თი $-$ მეორე რიგის წარმოებულს x_i და x_j ცვლადების მიმართ. მაგალითად, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv u_{,i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \equiv u_{,ij}$. თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში მხოლოდ ორჯერ გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ხდება აჯამვა მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე (შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ლათინური არამთავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1, 2, 3, ხოლო ბერძნული კი 1, 2). იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ფაქტს ადგილი აქვს, მაგრამ აჯამვა არ უნდა მოხდეს, ერთ-ერთ ინდექსს ქვემოდან ან ზემოდან გავუსვამთ ხაზს. მაგალითად, $a_i^i := \sum_{i=1}^3 a_i^i, \quad a_{ii} := \sum_{i=1}^3 a_{ii}$ მაგრამ $a_{\bar{i}i}, \quad a_{i\underline{i}}$ აღნიშნავს სამი $a_{11}, \quad a_{22}, \quad a_{33}-$ ელემენტიდან ერთერთს იმისდა მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას იღებს i.

არაკუმშვადი სითხის შემთხვევაში მოცემულ განტოლებებს ემატება უწყვეტობის განტოლება

$$div\dot{u}^f = 0, \tag{5}$$

და მდგომარეობის განტოლება

$$\chi(\rho^f, p) = 0. \tag{6}$$

ყველა სიდიდე გარდა კოეფიციენტებისა დამოკიდებულია ოთხ ცვლადზე (სამ სივრცით x_1, x_2, x_3 ცვლადზე და t დროზე).

განვიხილოთ არე, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია $x_3 = \overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)$ და $\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)$ ზედაპირებით. არის სისქეს აღვნიშნავთ

$$2h^f = \overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2) - \overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2) \tag{7}$$

$$P_n(\tau)=\frac{1}{2^n!}\frac{d^n(\tau^2-1)^n}{d\tau^n},\qquad n=0,1,2... \tag{8}$$

პოლინომებს ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდება. კერძოდ, კი

$$P_0(\tau)=1,\quad P_1(\tau)=\tau\quad P_2(\tau)=\frac{3\tau^2-1}{2} \tag{9}$$

თუ დავუშვებთ, რომ x_3 ცვლადის მიმართ $(\sigma_{ij}^f, e_{ij}^f, u_i^f)\in C^2$ კლასს $\left[\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2), \overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)\right]$ სეგმენტზე, მაშინ ის შეიძლება გაიშალოს მწკრივად ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ

$$\begin{gathered}\left(\sigma_{ij}^f, e_{ij}^f, u_i^f\right)(x_1,x_2,x_3,t)=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a(x_1,x_2)\left(\sigma_{ijn}^f, e_{ijn}^f, u_{in}^f\right)(x_1,x_2,t)P_n(ax_3-b)\end{gathered} \tag{10}$$

სადაც

$$\begin{gathered}\left(\sigma_{ijn}^f, e_{ijn}^f, u_{in}^f\right)(x_1,x_2,t)=\\ =\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\left(\sigma_{ij}^f, e_{ij}^f, u_i^f\right)(x_1,x_2,x_3,t)P_n(ax_3-b)dx_3\end{gathered} \tag{11}$$

n რიგის მათემატიკური მომენტია.

$$a^f(x_1,x_2):=\frac{1}{h^f(x_1,x_2)},\qquad b^f(x_1,x_2):=\frac{\overset{\sim}{h^f}(x_1,x_2)}{h^f(x_1,x_2)},\qquad 2\,\overset{\sim}{h^f}(x_1,x_2)=\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)+\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2) \tag{12}$$

$\left[\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2), \overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)\right]$ სეგმენტზე. იერარქიული მოდელების აგების ი.ვეკუას მეთოდი მდგომარეობს $(1)-(5)$ დამოკიდებულებების $P_n(ax_3-b)$ზე გამრავლებით და $\overset{(-)}{h^f}$დან $\overset{(+)}{h^f}$მდე x_3 ის მიმართ ინტეგრებით $\sigma_{ijr}^f, e_{ijr}^f, u_{ir}^f$ მათემატიკურ მომენტებზე გადასვლაში. N$-$ური მიახლოების (იერარქიული მოდელის) მისაღებად N$-$ზე მეტი რიგის მომენტს უკუვაგდებთ და განტოლებათა უსასრულო სისტემიდან განვიხილავთ მხოლოდ იმ განტოლებებს, რომელთა მთავარი (ე.ი. მეორე რიგის წარმოებულების შემცველი წევრებისგან შემდგარი) ნაწილები შეიცავენ N რიგამდე ჩათვლით მომენტებს [1].

r რიგის მომენტისთვის აღნიშნული განტოლებების ლეჟანდრის პოლინომზე გამრავლებით და x_3 ცვლადის მიმართ $\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)$-დან $\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)$-მდე ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\sigma_{\alpha jr,\alpha}^f+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}{}_{is}^f\sigma_{jis}^f+\overset{r}{X}{}_j^f=\rho\ddot{u}_{jr}^f \tag{13}$$

$$\sigma_{ijr}^f=-\delta_{ij}p_r+\lambda^f\delta_{ij}\dot{\theta}_r^f+2\mu^f\dot{e^f}_{ijr} \tag{14}$$

$$\dot{e}_{ijr}^f=\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}{}_{is}^f\dot{u}_{js}^f+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}{}_{js}^f\dot{u}_{is}^f+\overset{r}{\dot{E}}{}_{ij}^f,\qquad i,j=\overline{1,3} \tag{15}$$

სადაც

$$\theta_r^f:=\dot{e^f}_{iir}=\dot{u^f}_{\gamma r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}{}_{is}^f\dot{u}_{is}^f \tag{16}$$

$$\overset{r}{b}{}^{f}_{\alpha \bar{r}} := -(r+1)\frac{h^{f}_{,\alpha}}{h}, \quad \overset{r}{b}{}^{f}_{3\bar{r}} = 0, \quad \overset{r}{b}{}^{f}_{js} := \begin{cases} 0, & s < r \\ -\overset{r}{a}{}^{f}_{js}, & s > r \end{cases} \tag{17}$$

$$\overset{r}{\dot{E}}{}^{f}_{ij} := \frac{1}{2}(\overset{\cdot}{u}{}^{f}{}_{ir,j} + \overset{\cdot}{u}{}^{f}{}_{jr,i}), \quad \overset{r}{a}{}^{f}_{\alpha s} := (2s+1)\frac{\overset{(+)}{h}{}^{f}_{,\alpha} - (-1)^{r+s}\overset{(+)}{h}{}^{f}_{,\alpha}}{2h^{f}}, \quad s \neq r;$$

$$\overset{r}{a}{}^{f}_{\alpha \bar{r}} := r\frac{\overset{(+)}{h}{}^{f}_{,\alpha} - \overset{(+)}{h}{}^{f}_{,\alpha}}{2h^{f}} = r\frac{h^{f}_{,\alpha}}{2h^{f}}, \quad \overset{r}{a}{}^{f}_{3s} := -(2s+1)\frac{1-(-1)^{r+s}}{2h^{f}}, \quad \alpha = 1,2,$$

$$\overset{r}{X}{}^{f}_{j} := \overset{(+)}{\sigma}{}^{f}_{3j} - \overset{(+)}{\sigma}{}^{f}_{\gamma j}\overset{(+)}{h}{}^{f}_{,\gamma} + (-1)^{r}[-\overset{(-)}{\sigma}{}^{f}_{3j} + \overset{(-)}{\sigma}{}^{f}_{\gamma j}\overset{(-)}{h}{}^{f}_{,\gamma}] + \Phi^{f}_{jr}, \quad j = \overline{1,3}, \quad r = 1,2,3,...$$

ეს არის შემთხვევა, როცა პირით ზედაპირზე ძაბვის მნიშვნელობებია მოცემული [25].

2 იერარქიული მოდელები ბლანტი ბაროტროპული არაკუმშვადი სითხისთვის

2.1 N=0 მიახლოების შესაბამისი მოდელი

განვიხილოთ ი.ვეკუას მეთოდი $N=0$ მიახლოებისთვის, როცა პირით ზედაპირზე სიჩქარის ვექტორია მოცემული. ძაბვის მნიშვნელობებად ვიღებთ მიახლოვების შესაბამის

$$\sigma_{ij}^{f}(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{2h^f}\sigma_{ij0}^{f}(x_1,x_2,t) \qquad i=\overline{1,3} \tag{18}$$

მნიშვნელობებს.

(11)დან $N=0$ მიახლოებისთვის მივიღებთ

$$\begin{gathered}\left(\sigma_{ij0}^{f},e_{ij0}^{f},u_{i0}^{f}\right)(x_1,x_2,t)=\\ =\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\left(\sigma_{ij}^{f},e_{ij}^{f},u_{i}^{f}\right)(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 \qquad i=\overline{1,3}\end{gathered} \tag{19}$$

ვაინტეგროთ (1) განტოლება x_3 ცვლადით $\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)$ დან $\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)$ მდე.

$$\begin{gathered}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\sigma_{ij,j}^{f}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3+\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\Phi_i^f(x_1,x_2,x_3,t)dx_3=\\ =\int_{h\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\rho^f\ddot{u}_i^f(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 \qquad i=\overline{1,3}\end{gathered} \tag{20}$$

ცხადია,

$$\begin{gathered}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\sigma_{i\beta,\beta}^{f}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3+\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\sigma_{i3,3}^{f}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3+\\ +\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\Phi_i^f(x_1,x_2,x_3,t)dx_3=\rho^f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}u_i^f(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 \qquad i=\overline{1,3}\end{gathered} \tag{21}$$

(18)ის ძალით,

$$\begin{gathered}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)}\sigma_{i3,3}^{f}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3=\sigma_{i3}^{f}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)-\\ -\sigma_{i3}^{f}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)=\frac{1}{2h^f}\sigma_{i30}^{f}(x_1,x_2,t)-\frac{1}{2h^f}\sigma_{i30}^{f}(x_1,x_2,t)=0 \qquad i=\overline{1,3}\end{gathered} \tag{22}$$

გამოვიყენოთ პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესი:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{c(\xi)}^{d(\xi)}f(\xi,\eta)d\eta=\int_{c(\xi)}^{d(\xi)}\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial\xi}d\eta+f(\xi,d(\xi))\frac{\partial d}{\partial\xi}-f(\xi,c(\xi))\frac{\partial c}{\partial\xi} \tag{23}$$

მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \sigma^f_{i\beta,\beta}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \sigma^f_{i\beta}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 - \\
&\qquad -\sigma^f_{i\beta}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)\overset{(+)}{h^f}_{,\beta} + \sigma^f_{i\beta}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)\overset{(-)}{h^f}_{,\beta} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\beta}\sigma^f_{i\beta0}(x_1,x_2,t) - \frac{1}{2h^f}\sigma^f_{i\beta0}(x_1,x_2,t)\overset{(+)}{h^f}_{,\beta} + \frac{1}{2h^f}\sigma^f_{i\beta0}(x_1,x_2,t)\overset{(-)}{h^f}_{,\beta} = \\
&\qquad = \sigma^f_{i\beta0,\beta} - \frac{1}{2h^f}\sigma^f_{i\beta0}(\overset{(+)}{h^f}_{,\beta} - \overset{(-)}{h^f}_{,\beta}) = \sigma^f_{i\beta0,\beta} - \frac{h^f_{,\beta}}{h^f}\sigma^f_{i\beta0} = \\
&\qquad = \sigma^f_{i\beta0,\beta} - (\ln h^f)_{,\beta}\,\sigma^f_{i\beta0} \qquad i=\overline{1,3}, \beta = 1,2
\end{aligned}
\tag{24}
$$

შესაბამისად (21) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\sigma^f_{i\beta0,\beta} - (\ln h^f)_{,\beta}\,\sigma^f_{i\beta0} + \Phi^f_i(x_1,x_2,x_3,t) = \rho^f \ddot{u}^f_{i0} \qquad i=\overline{1,3} \tag{25}$$

აღნიშნული მიახლოებისთვის გადმოვწეროთ ნიუტონის განზოგადებული კანონი

$$\sigma^f_{ij0} = -\delta_{ij}p_0 + \lambda^f\delta_{ij}\dot{\theta}^f_0\dot{e}^f_{ii0} + 2\mu^f\dot{e}^f_{ij0}, \tag{26}$$

$$\sigma^f_{i\beta0} = -\delta_{i\beta}p_0 + \lambda^f\delta_{i\beta}\dot{\theta}^f_0\dot{e}^f_{kk0} + 2\mu^f\dot{e}^f_{i\beta0}, \tag{27}$$

ახლა, გამოვთვალოთ დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები. (3)-დან და (19)-დან მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\dot{e}^f_{i\beta0}(x_1,x_2,t) = \int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \sigma^f_{i\beta}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \Big(\dot{u}^f_{i,\beta}(x_1,x_2,x_3,t) + \dot{u}^f_{\beta,i}(x_1,x_2,x_3,t)\Big)dx_3 = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \dot{u}^f_i(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 - \dot{u}^f_i(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,\beta} + \dot{u}^f_i(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,\beta}\Bigg) + \\
&+\frac{1}{2}\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \dot{u}^f_\beta(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 \\
-\dot{u}^f_\beta(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,\alpha} + \dot{u}^f_\beta(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,\alpha}, & i=\alpha \\
+\dot{u}^f_\beta(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) - \dot{u}^f_\beta(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t), & i=3
\end{cases} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\dot{u}^f_{i0,\beta} - \dot{u}^f_i(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,\beta} + \dot{u}^f_i(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,\beta}\Big) +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\begin{cases} \dot{u}^f_{\beta 0,\alpha}(x_1,x_2,x_3,t)dx_3 & \\ -\dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,\alpha} + \dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,\alpha}, & i=\alpha \qquad i=\overline{1,3} \\ +\dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) - \dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t), & i=3. \end{cases} \tag{28}$$

აქედან გამომდინარე

$$\dot{e}^f_{\alpha\beta 0}(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2}\Big(\dot{u}^f_{\alpha 0,\beta} + \dot{u}^f_{\beta 0,\alpha}(x_1,x_2,x_3,t) - \dot{u}^f_{\alpha}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)\overset{(+)}{h^f}{}_{,\beta} + \dot{u}^f_{\alpha}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)\overset{(-)}{h^f}{}_{,\beta}$$
$$-\dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)\overset{(+)}{h^f}{}_{,\alpha} + \dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)\overset{(-)}{h^f}{}_{,\alpha}\Big) \tag{29}$$

$$\dot{e}^f_{\alpha 30} = \dot{e}^f_{3\alpha 0} = \frac{1}{2}\Big(\dot{u}^f_{30,\alpha} + \dot{u}^f_{\alpha}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) - \dot{u}^f_{\alpha}(x_1,x_2\overset{(-)}{h^f},t) - \dot{u}^f_{3}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)\overset{(+)}{h^f}{}_{,\alpha} + \dot{u}^f_{3}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)\overset{(-)}{h^f}{}_{,\alpha}\Big) \tag{30}$$

$$\dot{e}^f_{330} = \int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \dot{u}^f_{3,3} = \dot{u}^f_{3}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) - \dot{u}^f_{3}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t) \tag{31}$$

შევიტანოთ მიღებული (28)-(31) ფორმულები (26) განტოლებაში

$$\dot{\sigma}^f_{i\beta 0} = -\delta_{i\beta}p_0 + \lambda^f\delta_{i\beta}(\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma} + \psi^f_{kk}) + \mu^f(\dot{u}^f_{i0,\beta} + \dot{u}^f_{\beta 0,\alpha}) + 2\mu^f\psi^f_{i\beta} \qquad i=\overline{1,3}, \beta=1,2 \tag{32}$$

სადაც

$$2\psi^f_{i\beta} := \dot{u}^f_{i}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,\beta} - \dot{u}^f_{i}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,\beta} +$$
$$+\begin{cases} \dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,\alpha} - \dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,\alpha}, & i=\alpha \\ +\dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) - \dot{u}^f_{\beta}(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t), & i=3. \end{cases}$$

$$\dot{e}^f_{330} := \psi^f_{33} \tag{33}$$

ჩავსვათ (32) გამოსახულება (25) განტოლებაში. საბოლოოდ, ჩვენ საძიებო სისტემას აქვს

$$\mu^f(\dot{u}^f_{i0,\beta\beta} + \dot{u}^f_{\beta 0,i\beta}) + \lambda^f\delta_{i\beta}\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma\beta} - (\ln h^f)_{,\beta}\Big(\lambda^f\delta_{i\beta}\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma} + \mu^f(\dot{u}^f_{i0,\beta} + \dot{u}^f_{\beta 0,i})\Big) +$$
$$+\lambda^f\delta_{i\beta}\psi^f_{kk,\beta} + 2\mu^f\psi^f_{i\beta,\beta} - (\ln h^f)_{,\beta}(\lambda^f\delta_{i\beta}\psi^f_{kk} + 2\mu^f\psi^f_{i\beta}) - \tag{34}$$
$$-\delta_{i\beta}p_{0,\beta} + (\ln h^f)_{,\beta}\delta_{i\beta}p_0 + \Phi^f_{i0} = \rho^f\ddot{u}^f_{i0} \qquad i=\overline{1,3}$$

სახე.

კერძოდ, როცა $i = \alpha$

$$\begin{gathered}\mu^f(\dot{u}^f_{\alpha 0,\beta\beta} + \dot{u}^f_{\beta 0,\alpha\beta}) + \lambda^f \delta_{\alpha\beta}\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma\beta} - (\ln h^f)_{,\beta}\,[\lambda^f \delta_{\alpha\beta}\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma} + \mu^f(\dot{u}^f_{\alpha 0,\beta} + \dot{u}^f_{\beta 0,\alpha})] + \\ +\lambda^f \delta_{\alpha\beta}\psi^f_{kk,\beta} + 2\mu^f \psi^f_{\alpha\beta,\beta} - (\ln h^f)_{,\beta}\,(\lambda^f \delta_{\alpha\beta}\psi^f_{kk} + 2\mu^f \psi^f_{\alpha\beta}) - \\ -\delta_{\alpha\beta} p_{0,\beta} + (\ln h^f)_{,\beta}\,\delta_{\alpha\beta} p_0 + \Phi^f_{\alpha 0} = \rho^f \ddot{u}^f_{\alpha 0}\end{gathered} \tag{35}$$

როცა $i = 3$

$$\begin{gathered}\mu^f \dot{u}^f_{30,\beta\beta} - \mu^f (\ln h^f)_{,\beta}\,\dot{u}^f_{30,\beta} + 2\mu^f \psi^f_{3\beta,\beta} - 2\mu^f (\ln h^f)_{,\beta}\,\psi^f_{3\beta} \\ +\Phi^f_{30} = \rho^f \ddot{u}^f_{30}\end{gathered} \tag{36}$$

გამოვიყენოთ განზომილების რედუქციის მეთოდი (5) უწყვეტობის განტოლებისთვის

$$\frac{\partial \dot{u}^f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}^f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{u}^f_3}{\partial x_3} = 0 \tag{37}$$

ნულოვანი რიგის ლეჟანდრის პოლინომი ერთის ტოლია. ვაინტეგროთ (37) განტოლება x_3 ცვლადით $\overset{(-)}{h^f}$ დან $\overset{(+)}{h^f}$ მდე

$$\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \frac{\partial \dot{u}^f_1}{\partial x_1} dx_3 + \int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \frac{\partial \dot{u}^f_2}{\partial x_2} dx_3 + \int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \frac{\partial \dot{u}^f_3}{\partial x_3} dx_3 = 0 \tag{38}$$

აქედან გავითვალისწინოთ პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესი გვექნება

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \dot{u}^f_1 dx_3 + \dot{u}^f_1(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,1} - \dot{u}^f_1(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,1} + \\ +\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{\overset{(-)}{h^f}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h^f}(x_1,x_2)} \dot{u}^f_2 dx_3 + \dot{u}^f_2(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,2} - \dot{u}^f_2(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,2} + \\ +\dot{u}^f_3(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) - \dot{u}^f_3(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t) = 0\end{gathered} \tag{39}$$

(19)−ის თანახმად, გვექნება

$$\dot{u}^f_{10,1} + \dot{u}^f_{20,2} = \psi^f \tag{40}$$

სადაც

$$\begin{gathered}\psi^f = -\dot{u}^f_1(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,1} + \dot{u}^f_1(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,1} - \\ -\dot{u}^f_2(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)(\overset{(-)}{h^f})_{,2} + \dot{u}^f_2(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t)(\overset{(+)}{h^f})_{,2} - \\ -\dot{u}^f_3(x_1,x_2,\overset{(+)}{h^f},t) + \dot{u}^f_3(x_1,x_2,\overset{(-)}{h^f},t)\end{gathered} \tag{41}$$

ახლა (34) განტოლებათა სისტემაში შემავალი პირველი განტოლება გავაწარმოოთ x_1 ცვლადით, მეორე $-x_2-$ით

$$\mu^f(\dot{u}^f_{10,\beta\beta 1}+\dot{u}^f_{\beta 0,1\beta 1})+\lambda^f\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma 11}-(\ln h^f)_{,11}\,\lambda^f\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma}-(\ln h^f)_{,1}\,\lambda^f\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma 1}-$$
$$-(\ln h^f)_{,\beta 1}\,\mu^f(\dot{u}^f_{10,\beta}+\dot{u}^f_{\beta 0,1})-(\ln h^f)_{,\beta}\,\mu^f(\dot{u}^f_{10,\beta 1}+\dot{u}^f_{\beta 0,11})+\lambda^f\psi^f_{kk,11}+2\mu^f\psi^f_{1\beta,\beta 1}-$$
$$-(\ln h^f)_{,11}\,\lambda^f\psi^f_{kk}-(\ln h^f)_{,1}\,\lambda^f\psi^f_{kk,1}-2(\ln h^f)_{,\beta 1}\,\mu^f\psi^f_{1\beta}-2(\ln h^f)_{,\beta}\,\mu^f\psi^f_{1\beta,1} \tag{42}$$
$$-p_{0,11}+(\ln h^f)_{,1}\,p_{0,1}+(\ln h^f)_{,11}\,p_0+\Phi^f_{10,1}=\rho^f\ddot{u}^f_{10,1}$$

$$\mu^f(\dot{u}^f_{20,\beta\beta 2}+\dot{u}^f_{\beta 0,2\beta 2})+\lambda^f\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma 22}-(\ln h^f)_{,22}\,\lambda^f\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma}-(\ln h^f)_{,2}\,\lambda^f\dot{u}^f_{\gamma 0,\gamma 2}-$$
$$-(\ln h^f)_{,\beta 2}\,\mu^f(\dot{u}^f_{20,\beta}+\dot{u}^f_{\beta 0,2})-(\ln h^f)_{,\beta}\,\mu^f(\dot{u}^f_{20,\beta 2}+\dot{u}^f_{\beta 0,22})+\lambda^f\psi^f_{kk,22}+2\mu^f\psi^f_{2\beta,\beta 2}-$$
$$-(\ln h^f)_{,22}\,\lambda^f\psi^f_{kk}-(\ln h^f)_{,2}\,\lambda^f\psi^f_{kk,2}-2(\ln h^f)_{,\beta 2}\,\mu^f\psi^f_{2\beta}-2(\ln h^f)_{,\beta}\,\mu^f\psi^f_{2\beta,2} \tag{43}$$
$$-p_{0,22}+(\ln h^f)_{,2}\,p_{0,2}+(\ln h^f)_{,22}\,p_0+\Phi^f_{20,2}=\rho^f\ddot{u}^f_{20,2}$$

რადგან, ყველა სიდიდე x_1, x_2 ცვლადზეა დამოკიდებული x_3-ით გაწარმოების შემთხვევაში მივიღებთ $0-$ს, შესაბამისად მესამე განტოლება არ გვაქვს.

შევკრიბოთ (42) და (43) განტოლებები და გავითვალისწინოთ (40), მივიღებთ დამოუკიდებელ განტოლებას წნევისთვის

$$p_{0,\alpha\alpha}-(\ln h^f)_{,\alpha}\,p_{0,\alpha}+(\ln h^f)_{,\alpha\alpha}\,p_0=2\mu^f\psi^f_{3,\alpha\alpha}+\lambda^f\psi^f_{3,\alpha\alpha}-(\ln h^f)_{,\alpha\alpha}\,\lambda^f\psi^f_3-$$
$$-(\ln h^f)_{,\alpha}\,\lambda^f\psi^f_{3,\alpha}-(\ln h^f)_{,\beta\alpha}\,\mu^f(\dot{u}^f_{\alpha 0,\beta}+\dot{u}^f_{\beta 0,\alpha})-(\ln h^f)_{,\beta}\,\mu^f(\dot{u}^f_{\alpha 0,\beta\alpha}+\dot{u}^f_{\beta 0,\alpha\alpha})+$$
$$+\lambda^f\psi^f_{kk,\alpha\alpha}+2\mu^f\psi^f_{\alpha\beta,\beta\alpha}-(\ln h^f)_{,\alpha\alpha}\,\lambda^f\psi^f_{kk}-(\ln h^f)_{,\alpha}\,\lambda^f\psi^f_{kk,\alpha}- \tag{44}$$
$$-2(\ln h^f)_{,\beta\alpha}\,\mu^f\psi^f_{\alpha\beta}-2(\ln h^f)_{,\beta}\,\mu^f\psi^f_{\alpha\beta,\alpha}+\Phi_{\alpha 0,\alpha}-\rho^f\dot{\psi}^f_3$$

2.2 ხარისხოვანი წამახვილება

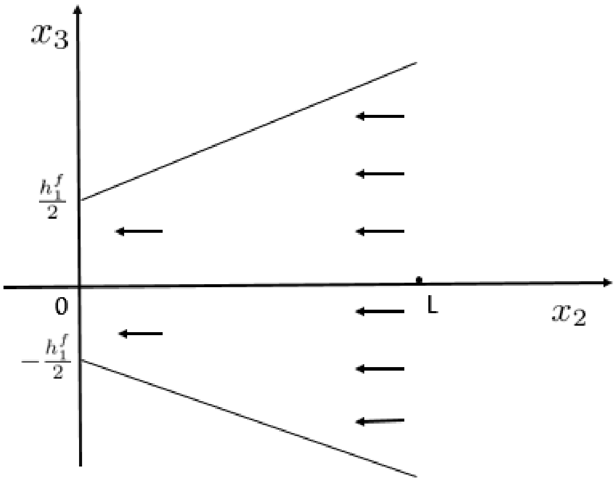
განვიხილოთ $2h^f=h^f_0x_2^\kappa+h^f_1$ სისქის მქონე გარსული ტიპის არე $h^f_0,h^f_1=const>0$ და $\kappa=const\geq 0$. სითხე მოძრაობს Ox_2x_3 სიბრტყეში $x_2=L$-დან $x_2=0$ ნაპირისკენ (ნახ.1). განსახილველ შემთხვევაში ყველა სიდიდე x_2 და x_3 ცვლადებზეა დამოკიდებული. სითხის მოძრაობის აღმწერი ნულოვანი მომენტები კი მხოლოდ x_2 ცვლადზეა დამოკიდებული. ვეძებთ ისეთ $p_0\in C(0,L],\dot{u}^f{}_{20}\in C(0,L],\dot{u}^f{}_{30}\in C[0,L]$, რომლებიც ამასთანავე $\dot{u}^f{}_{20}\in C^1(0,L),p_0,\dot{u}^f{}_{30}\in C^2(0,L)$. ამის გათვალისწინებით, სტაციონარულ შემთხვევაში (40)$-$დან გვექნება

$$\dot{u}^f_{20,2}=\psi^f \tag{45}$$

ვაინტეგროთ მიღებული განტოლება

$$\dot{u}^f_{20}=\int_{x_2}^{L}\psi^f d\tau+\overset{2}{c} \tag{46}$$

ამ შემთხვევაში საკმარისია დაისვას ერთი სასაზღვრო პირობა. ვთქვათ,



ნახ.1

$$\dot{u}^f_{20}(L) = \overset{L}{\dot{u}}{}^f_{20} \tag{47}$$

აქედან და (48)−დან მივიღებთ

$$\dot{u}^f_{20}(L) = \int_L^L \psi^f d\tau + \overset{2}{c} \qquad \Rrightarrow \qquad \overset{2}{c} = \overset{L}{\dot{u}}{}^f_{20} \tag{48}$$

შევიტანოთ $\overset{2}{c}$−ს მნიშვნელობა (48)−ში. მივიღებთ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს

$$\dot{u}^f_{20} = \int_{x_2}^L \psi^f d\tau + \overset{L}{\dot{u}}{}^f_{20} \tag{49}$$

ახლა, როცა $\dot{u}^f_{20}$ ცნობილია, (35)−დან p_0 ფუნქციისთვის სტაციონარულ შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$p_{0,2} - (\ln h^f)_{,2}\, p_0 = A(x_2) \tag{50}$$

სადაც

$$\begin{aligned} A(x_2) := (2\mu^f + \lambda^f)\psi^f_{,2} - (\ln h^f)_{,2}(2\mu^f + \lambda^f)\psi^f + (2\mu^f + \lambda^f)\psi_{22,2} - \\ -(\ln h^f)_{,2}(2\mu^f + \lambda^f)\psi_{22} + \lambda^f(\psi^f_{33,2} - (\ln h^f)_{,2}\psi^f_{33}) + \Phi^f_{20} \end{aligned} \tag{51}$$

ცნობილი სიდიდეა. (50) წარმოადგენს პირველი რიგის არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამონახსნი გამოისახება კოშის ფორმულით

$$p_0 = e^{\int_{x_2}^L (\ln h^f(\xi))_{,\xi} d\xi}\Big(c + \int_{x_2}^L e^{-\int_s^L (\ln h^f(\xi))_{,\xi} d\xi} A(s) ds\Big) \tag{52}$$

$$p_0 = \frac{h_0^f L^\kappa + h_1^f}{h_0^f x_2^\kappa + h_1^f}\Big(c + \int_{x_2}^L \frac{h_0^f s^\kappa + h_1^f}{h_0^f L^\kappa + h_1^f} A(s) ds\Big) \tag{53}$$

განვიხილოთ (53) სასაზღვრო ამოცანა

$$p_0(L) = p_0^L \tag{54}$$

სასაზღვრო პირობით.

$$p_0(L) = c = p_0^L \quad \Rightarrow \quad c = p_0^L \tag{55}$$

საბოლოოდ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია

$$p_0 = \frac{h_0^f L^\kappa + h_1^f}{h_0^f x_2^\kappa + h_1^f}\Big(p_0^L + \int_{x_2}^{L} \frac{h_0^f s^\kappa + h_1^f}{h_0^f L^\kappa + h_1^f} A(s) ds\Big) \tag{56}$$

ახლა, ვიპოვოთ $\dot{u}_{30}^f$ (36) საძიებო სისტემიდან სტაციონარულ შემთხვევაში გვაქვს

$$\dot{u}_{30,22}^f - (\ln h^f)_{,2}\dot{u}_{30,2}^f = B(x_2) \tag{57}$$

სადაც

$$\mu^f B(x_2) := -2\psi_{3\beta,\beta}^f - 2(\ln h^f)_{,\beta}\psi_{3\beta}^f + \Phi_{30} \tag{58}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნისათვის განვიხილოთ მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\dot{u}_{30,22}^f - (\ln h^f)_{,2}\dot{u}_{30,2}^f = 0 \tag{59}$$

$$\begin{gathered} \dot{u}_{30,2}^f := y \\ y_{,2} - (\ln h^f)_{,2} y = 0 \end{gathered} \tag{60}$$

$$y = \overset{3}{c}_1 e^{\int_{x_2}^{L} (\ln h^f(\zeta))_{,\zeta} d\zeta} = \overset{3}{c}_1 \frac{h_0^f L^\kappa + h_1^f}{h_0^f x_2^\kappa + h_1^f} \tag{61}$$

$$\dot{u}_{30,2}^f = \overset{3}{c}_1 \frac{h_0^f L^\kappa + h_1^f}{h_0^f x_2^\kappa + h_1^f} \tag{62}$$

$$\dot{u}_{30}^{fe} = \overset{3}{c}_1 (h_0^f L^\kappa + h_1^f) \int_{x_2}^{L} \frac{1}{h_0^f \zeta^\kappa + h_1^f} d\zeta + \overset{3}{c}_2 \tag{63}$$

სადაც, $\overset{3}{c}_1$ და $\overset{3}{c}_2$ ნებისმიერი მუდმივებია.

$$\dot{u}_{30_1}^f = (h_0^f L^\kappa + h_1^f) \int_{x_2}^{L} \frac{1}{h_0^f \zeta^\kappa + h_1^f} d\zeta, \qquad \dot{u}_{30_2}^f = 1$$

ახლა ვიპოვოთ (58) განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელსაც თეორემის [38] თანახმად აქვს

$$\dot{u}_{30}^f = -\dot{u}_{30_1}^f \int_0^{x_2} \frac{B(\zeta)\dot{u}_{30_2}^f}{W(\dot{u}_{30_1}^f, \dot{u}_{30_2}^f)} d\zeta + \dot{u}_{30_2}^f \int_0^{x_2} \frac{B(\zeta)\dot{u}_{30_1}^f}{W(\dot{u}_{30_1}^f, \dot{u}_{30_2}^f)} d\zeta \tag{64}$$

სახე.

სადაც, $W(\dot{u}_{30_1}^f, \dot{u}_{30_2}^f)$ ვრონსკის დეტერმინანტია და ჩვენ შემთხვევაში

.

$$W(\dot{u}_{30_1}^f, \dot{u}_{30_2}^f) = \begin{vmatrix} \dot{u}_{30_1}^f & \dot{u}_{30_2}^f \\ (\dot{u}_{30_1}^f)' & (\dot{u}_{30_2}^f)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (h_0^f L^\kappa + h_1^f) \int_{x_2}^{L} \frac{1}{h_0^f \zeta^\kappa + h_1^f} d\zeta & 1 \\ -\frac{h_0^f L^\kappa + h_1^f}{h_0^f x_2^\kappa + h_1^f} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{h_0^f L^\kappa + h_1^f}{h_0^f x_2^\kappa + h_1^f} \tag{65}$$

ტოლია.

შესაბამისად, (58) განტოლების კერძო ამონახსნია:

$$\dot{u}_{30}^{fc} = \int_{x_2}^{L} \frac{1}{h_0^f \xi^\kappa + h_1^f} d\xi \int_{x_2}^{L} B(\zeta)(h_0^f \zeta^\kappa + h_1^f) d\zeta - \int_{x_2}^{L} B(\zeta)(h_0^f \zeta^{\kappa+1} + h_1^f) \int_{\zeta}^{L} \frac{1}{h_0^f \xi^\kappa + h_1^f} d\xi d\zeta \tag{66}$$

ხოლო თუკი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს მივუმატებთ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს მივიღებთ არააერთგაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_{30}^{f} = \overset{3}{c}_1(h_0^f L^\kappa + h_1^f)\int_{x_2}^{L}\frac{1}{h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f}d\zeta + \overset{3}{c}_2 + \int_{x_2}^{L}\frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi\int_{x_2}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)d\zeta - \\
-\int_{x_2}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)\int_{\zeta}^{L}\frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi d\zeta
\end{aligned}
\tag{67}
$$

გავაანალიზოთ $[0, L]$ ინტერვალზე სასაზღვრო ამოცანების დასმის საკითხი. $x_2 = 0$ და $x_2 = L$ ნაპირზე დავსვათ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_{30}^{f}(0) = 0 \\
\dot{u}_{30}^{f}(L) = 0
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$(67)-$დან

$$
\dot{u}_{30}^{f}(L) = \overset{3}{c}_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{3}{c}_2 = 0 \tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_{30}^{f}(0) = \overset{3}{c}_1(h_0^f L^\kappa + h_1^f)\int_{0}^{L}\frac{1}{h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f}d\zeta + \int_{0}^{L}\frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi\int_{0}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)d\zeta - \\
-\int_{0}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)\int_{0}^{L}\frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi d\zeta
\end{aligned}
\tag{70}
$$

აქედან და $(68)-$დან მოვიღებთ

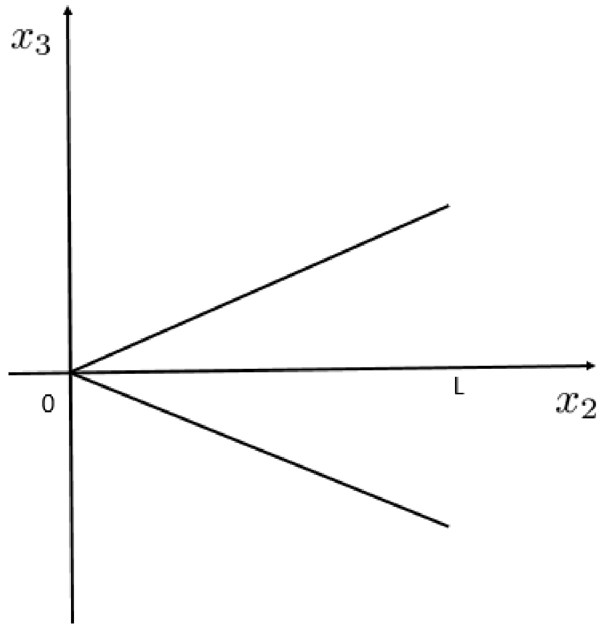
$$
\overset{3}{c}_1 = -\frac{1}{h_0^f L^\kappa + h_1^f}\int_{0}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)d\zeta + \frac{\int_0^L B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)\int_0^L \frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi d\zeta}{(h_0^f L^\kappa + h_1^f)\int_0^L \frac{1}{h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f}d\zeta} \tag{71}
$$

ამდენად, $(58)-$ (68) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_{30}^{f} = \left(\frac{\int_0^L B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)\int_\zeta^L \frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi d\zeta}{\int_0^L \frac{1}{h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f}d\zeta} - \int_0^L B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)d\zeta\right)\int_{x_2}^{L}\frac{1}{h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f}d\zeta + \\
+\int_{x_2}^{L}\frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi\int_{x_2}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)d\zeta - \int_{x_2}^{L}B(\zeta)(h_0^f\zeta^\kappa + h_1^f)\int_{\zeta}^{L}\frac{1}{h_0^f\xi^\kappa + h_1^f}d\xi d\zeta
\end{aligned}
\tag{72}
$$

როცა $h_1^f \to 0$ სითხის მიერ დაკავებული არის სისქეა $2h^f = h_0^f x_2^\kappa$, $\quad h_0^f = const > 0$, $\quad \kappa = const \geq 0$ ე.ი. ადგილი აქვს წამახვილებას (არის პროექცია ox_2x_3 სიბრტყეში იხ.ნახ.2).

ამის გათვალისწინებით $p_0 \to \frac{L^\kappa}{x_2^\kappa}\left(p_0^L + \int_{x_2}^{L}\frac{s^\kappa}{L^\kappa}A(s)ds\right)$. ხოლო, თუკი $x_2 \to 0$, $\quad p_0 \to \infty$. რაც იმას ნიშნავს, რომ წამახვილების დროს, სითხის ნაკადი ვეღარ გაედინება და წნევა უსასრულოდ დიდი ხდება.



ნახ.2

აღნიშნულ შემთხვევაში (67) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\dot{u}_{30}^{f} = \overset{3}{c}_1 L^{\kappa} \int_{x_2}^{L} \frac{1}{\zeta^{\kappa}} d\zeta + \overset{3}{c}_2 + \int_{x_2}^{L} \frac{1}{\xi^{\kappa}} d\xi \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} d\zeta - \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} \int_{\zeta}^{L} \frac{1}{\xi^{\kappa}} d\xi d\zeta \qquad (73)$$

თუ $\kappa < 1$

$$\dot{u}_{30}^{f} = \overset{3}{c}_1 L^{\kappa} \frac{L^{1-\kappa} - x_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} + \overset{3}{c}_2 + \frac{L^{1-\kappa} - x_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} d\zeta - \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} \frac{L^{1-\kappa} - \zeta^{1-\kappa}}{1-\kappa} d\zeta \quad (74)$$

(68) სასაზღვრო პირობების განხილვით ამონახსნი ცხადი სახით ჩაიწერება.

თუ $\kappa \geq 1$, $x_2 = 0$ წერტილში სასაზღვრო პირობებს ვერ დავასახელებთ და იგი შემოსაზღვრულობით უნდა შევცვალოთ. აქედან გამომდინარე $\overset{3}{c}_1$ ნულის ტოლი უნდა ავიღოთ

$$\dot{u}_{30}^{f} = \begin{cases} \ln \frac{L}{x_2} \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta d\zeta - \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} \ln \frac{L}{\zeta} d\zeta, & \kappa = 1 \\ \frac{L^{1-\kappa} - x_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} d\zeta - \int_{x_2}^{L} B(\zeta)\zeta^{\kappa} \frac{L^{1-\kappa} - \zeta^{1-\kappa}}{1-\kappa} d\zeta, & \kappa > 1 \end{cases} \qquad (75)$$

ე.ი. $\dot{u}_{30}^{f}$-ს მნიშვნელობა დამოკიდებულია κ-ზე, როცა $\kappa < 1$ (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ადგილი აქვს ბლაგვ წამახვილებას) $x_2 = 0$ საზღვარზე შეგვიძლია სიჩქარის დასახელება, როცა $\kappa \geq 1$ (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ადგილი აქვს მახვილ წამახვილებას) სასაზღვრო პირობა ამონახსნის შემოსაზღვრულობით იცვლება.

დასკვნა

ნაშრომში ავაგეთ იერარქიული მოდელი ბლანტი ბაროტროპული არაკუმშვადი სითხისთვის ნულოვან მიახლოებაში (გაწრფივებული სტოქსის მოდელის ფარგლებში). ცხადი სახით ამოიწერა სითხის მოძრაობის აღმწერი განტოლებები. განვიხილეთ გარსული ტიპის არეში, რომლის სისქე იცვლება $2h^f = h_0^f x_2^\kappa + h_1^f, \quad h_0^f, h_1^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$ კანონით მოძრავი სითხის ორგანზომილებიანი ამოცანა, როდესაც სითხის მოძრაობა ხდება Ox_2x_3 სიბრტყეში, $x_2 = L$-დან $x_2 = 0$ მიმართულებით. ამოცანის ამონახსნი აიგება ცხადი სახით. როცა $h_1^f \to 0$ ვიღებთ წამახვილებულ არეს, რომლის სისქეა $2h^f = h_0^f x_2^\kappa, \quad h_0^f = const > 0, \quad \kappa = const \geq 0$. ამ არეში შესწავლილია სითხის წნევის ნულოვანი მომენტისა და სიჩქარის კომპონენტების ნულოვანი მომენტების ყოფაქცევა წამახვილებულ ნაპირში. კერძოდ, დადგენილია, რომ თუ $\kappa > 0, \quad x_2 = 0$ წერტილში p_0 უსასრულოდ დიდი ხდება. $u^f{}_{30}$-თვის კი, წამახვილებულ ნაპირში, როცა $\kappa < 1$ შეიძლება დირიხლეს პირობის დასახელება ხოლო, როცა $\kappa \geq 1$ ამოცანა კორექტული, რომ გახდეს დირიხლეს პირობა შემოსაზღვრულობით შევცვალეთ.

ლიტერატურა

[1] ჯაიანი, გ. უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები(მეორე გადამუშავებული და შევსებული გამოცემა), თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა (2018)

[2] Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of a hierarchical model of prismatic sheiis, Bull. Georgian Acad. Sci., 165, 3 (2001), 485-488

[3] Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic sheiis, Georgian Mathematical Journal, 10,1 (2003), 17-36.

[4] Avalishvili G., Avalishvili M., Investigation of dynamical one-dimensional models for elastic rods with variable cross-sections. Bull. Georgian. Acad. Sci. 174(3), 399–402 (2006)

[5] Avalishvili G., Avalishvili M., On a hierarchical model of elastic rods with variable crosssections. Appl. Math. Inform. Mech. 9(1), 1–16 (2004)

[6] Avalishvili G., Avalishvili M., On the investigation of one-dimensional models for thermoelastic beams. Bull. Georgian Acad. 3(3), 25–32 (2009)

[7] Chinchaladze, N. On some Nonclassical Problems for Differential Equations and Their Applications to the Theory of Cusped Prismatic Shells. Lecture Notes of TICMI, 9 (2008)

[8] Chinchaladze, N., Gilbert, R.P., Jaiani, G., Kharibegashvili, S., Natroshvili D. Existence and uniqueness theorems for cusped prismatic shells in the N-th hierarchical model, Mathematical Methods in Applied Sciences, 31, 11 (2008) 1345-1367, DOI 10.1002 /mma.975, for the electronic version see: http://www3.interscience.wiley.com/

[9] Chinchaladze, N., Jaiani, G., Maistrenko, B., Podio-Guidugli, P. Concentrated contact interactions in cuspidate prismatic shell-like bodies, Archive of Applied Mechanics, 81,10 (2011) , 1487-1505

[10] Chinchaladze, N.; Gilbert, R. P.; Kharibegashvili, S.; Natroshvili, D. Cusped Elastic Beams under the Action of Stresses and Concentrated Forces. Applicable Analysis, 89 (5), 757–774, 2010, access: http://www.tandf.co.uk/journals

[11] Chinchaladze N. Cylindrical Bending of a Cusped Plate with Big Deflections, Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya (Contemporary Mathematics and Its Applications), 51, Differential Equations and Their Applications, 2008 (in Russian)

[12] Chinchaladze N., G. Jaiani, Hierarchical Mathematical Models for Solid-Fluid l11teractio11 Problems (Georgian). Materials of the International Conference on Non-Classic Problems of Mechanics, Kutaisi, Georgia, 25-27 October, Kutaisi, vol. 2 (2007), pp. 59–64

[13] Chinchaladze N. B., R . P. Gilbert. Vibration of an elastic plate under action of an incompressible fluid in case of $N = 0$ approximation of I. Vekua's hierarchical models Applicable Analysis, 85 (2006), 1177-1187

[14] Chinchaladze N. B., R.P. Gilbert. Cylindrical vibration of an elastic cusped plate under the action of an incompressible fluid in case of N= 0 approximation of I. Vekuas hierarchical models. Complex Variables, 50(7-11):479-496

[15] Cochin N. E., I. A. Kibel, and N. V. Rose, Theoretical Hydromechanics, Part 2, Fizmatgiz, 1963

[16] Gordeziani D., On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl.Akad. Nauk SSSR 215,6 (1974), 1289-1292.

[17] Gordeziani D., To the accuracy of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad.

Nauk SSSR, 215, 4(1974), 751-754.

[18] Jaiani G., Application of Vekua's dimension reduction method to cusped plates and bars,Bull.TICMI(2001), 27-34.

[19] Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries – cusped plates and shells, ZAMM, 76, Suppl.2 (1996), 117-120. 33

[20] Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L., Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams, Lecture Notes of TICMI, 4, 2003.

[21] Jaiani G., On a mathematical model of bars with variable restangular Cross-sections, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., 81, 3 (2001), 147-173.

[22] Jaiani G., Relation of hierarchical models of cusped elastic plates and shells to the threedimensional models, Reports of Seminar of I.Vekua Inst. of Appl. Math., 28 (2002), 40-51.

[23] Jaiani G., Some remarks concerning cusped plates and beams, Transactions of the Georgian Technical University, 1 (447) (2003), 44-48.

[24] Jaiani G., Theory of Cusped Euler-Bernoulli beams and Kirchhof-Love plates, Lecture Notes of TICMI, 3, 2002.

[25] Jaiani, G. Cusped Shell-like Structures Springer, Heidelberg-Dorbrecht-London-New York, 2011

[26] Jaiani, G., Kharibegashvili, S., Natroshvili, D., Wendland, W Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, Journal of Elasticity, 77, 2 (2004), 95-122

[27] Jaiani, G.V., Kharibegashvili, S.S., Natroshvili, D.G. and Wendland, W.L. Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, Journal of Elasticity, 77 (2004), 95-112

[28] Jaiani George: Piezoelectric Viscoelastic Kelvin-Voigt Cusped Prismatic Shells , Lecture Notes of TICMI, v.19. 2018

[29] Jesun Uh and Hwajoon Kim The flow of fluid moving between two parallel plates represented by the Laplace transform pp. 4867-4872

[30] Howard H. Hu Theoretical and Computational Fluid Dynamics volume 7, pages441–455(1995)

[31] Meunargia T., On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells, Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, 119 (1999), 133-154.

[32] Mikhlin, S.G. Variational Methods in Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1970 (Russian)

[33] Vashakmadze T., The Theory of Anisotropic Plates, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht- -London–Boston, 1999.

[34] Vekua I., Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston–London–Melburne, 1985.

[35] Vekua, I.N. On a way of calculating of prismatic shells. Proceedings of A.Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 21 (1955), 191-259 (Russian) 34

[36] Vekua, I.N. The theory of thin shallow shells of variable thickness. Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30 (1965),

5-103 (Russian)

[37] Wang C. Y. Fluid flow due to a stretching cylinder, The Physics of Fluids 31, 466 (1988)

[38] William E. Boyce, Richard C. DiPrima – 7th ed. Elementary differential equations and boundary value problems / p. cm. Includes index. ISBN 0-471-31999-6 (cloth : alk. paper) 1. Differential equations. 2. Boundary value problems. I. DiPrima, Richard C. II. Title QA371 .B773 2000 515'.35–dc21 00-023752 Printed in the United States of America