



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

მარिका გაჩეჩილაძე

დროით არალოკალური ამოცანების გამოკვლევა პირველი რიგის
ევოლუციური და შრედინგერის ტიპის განტოლებებისათვის

სამაგისტრო პროგრამა: მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური
ხარისხის მოსაპოვებლად

სამაგისტრო ნაშრომის ხელმძღვანელი: გია ავალიშვილი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი

თბილისი

2020

სარჩევი

ანოტაცია (ქართულ და ინგლისურ ენაზე)	3
შესავალი	4
თავი 1. დროით არალოკალური ამოცანები პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებებისთვის	
1.1. არალოკალური ამოცანის ჩამოყალიბება აბსტრაქტულ სივრცეებში ევოლუციური განტოლებისათვის	6
1.2. არალოკალური ამოცანის გამოკვლევა ევოლუციური განტოლებისათვის	8
1.3. ევოლუციური განტოლებისათვის არალოკალური ამოცანის აპროქსიმაცია კლასიკური ამოცანებით	16
1.4. დროით არალოკალური ამოცანების გამოკვლევა პარაბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის	20
თავი 2. დროით არალოკალური ამოცანები შრედინგერის ტიპის განტოლებებისთვის	
2.1. არალოკალური ამოცანის ჩამოყალიბება აბსტრაქტულ სივრცეებში შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის	27
2.2. არალოკალური ამოცანის გამოკვლევა აბსტრაქტული შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის	28
2.3. აბსტრაქტული შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის არალოკალური ამოცანის აპროქსიმაცია კლასიკური ამოცანებით	34
2.4. დროით არალოკალური ამოცანების გამოკვლევა შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის	37
დასკვნა	47
ლიტერატურა	48

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია არაკლასიკური საწყის-სასაზღვრო ამოცანები არალოკალური საწყისი პირობებით პარაბოლური და შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის და მათი განზოგადებებისათვის აბსტრაქტულ სივრცეებში. გამოკვლეულია აბსტრაქტულ სივრცეებში პირველი რიგის ევოლუციური და შრედინგერის განტოლებებისათვის დროით არალოკალური ამოცანების ამონახსნების არსებობა და ერთადერთობა. აგებული და შესწავლილია არალოკალური ამოცანების კლასიკური ამოცანების მიმდევრობით მიახლოების ალგორითმი. მოყვანილია მიღებული ზოგადი შედეგების გამოყენება დროით არალოკალური საწყის-სასაზღვრო ამოცანებისათვის პარაბოლური და შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის.

Summary

In this paper nonclassical initial-boundary value problems with non-local initial conditions for parabolic and Schrödinger type equations and systems, and their generalizations in abstract spaces are considered. The existence and uniqueness of solutions of nonlocal in time problems for first-order evolution equation and Schrödinger equation in abstract spaces is investigated. An algorithm of approximation of nonlocal problems by a sequence of classical problems is constructed and investigated. Applications of the obtained abstract results to initial-boundary value problems for parabolic and Schrödinger type equations and systems are presented.

შესავალი

მათემატიკურ ფიზიკაში კლასიკური სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევასთან ერთად მნიშვნელოვანია ისეთი ამოცანების შესწავლა, რომლებშიც მოცემულია არაკლასიკური სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები, ვინაიდან ისინი ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა პროცესების მათემატიკური მოდელირებისათვის ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, ეკოლოგიაში, ქიმიაში და სხვა დარგებში. არაკლასიკური ამოცანების ერთერთ კლასს წარმოადგენენ დროით და სივრცით არალოკალური ამოცანები, სადაც უცნობი ფუნქციის საწყისი ან სასაზღვრო მნიშვნელობები არ არის მოცემული.

არაკლასიკურ ამოცანებში არალოკალური სასაზღვრო პირობებით მოცემულია დამოკიდებულება უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის სივრცითი არის მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე და სივრცითი არის შიდა წერტილებში. არალოკალური ამოცანა ინტეგრალური სასაზღვრო პირობით პირველად გამოყენებული იყო სითბოგამტარობის პროცესის გამოკვლევისას [1] ნაშრომში, სადაც ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით შესწავლილი იყო არალოკალური ამოცანა კლასიკურ რეგულარულ ფუნქციათა სივრცეებში. შემდგომში, ამოცანები ინტეგრალური არალოკალური სასაზღვრო პირობებით შესწავლილი იყო მათემატიკური ფიზიკის სხვადასხვა განტოლებისათვის [2-6].

სივრცით არალოკალური ამოცანების განსხვავებული კლასის სისტემური კვლევა განხორციელდა [7] ნაშრომში ელიფსური განტოლებებისათვის არალოკალური სასაზღვრო პირობებით, სადაც უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობები საზღვრის ნაწილზე მისი მნიშვნელობების ტოლია სივრცის არის შიდა წერტილებში. [8, 9] ნაშრომებში მოყვანილი იყო [7]-ში ჩამოყალიბებული არაკლასიკური ამოცანის და მისი განზოგადებების ამოხსნის იტერაციული მეთოდი საკმარისად ზოგადი ელიფსური განტოლებების შემთხვევაში. მოგვიანებით, მსგავსი ტიპის არალოკალური ამოცანები შესწავლილი იყო ელიფსური, პარაბოლური და ჰიპერბოლური განტოლებებისათვის (იხ. [10-12] და მათში ციტირებული ლიტერატურა). აღსანიშნავია, რომ [7]-ში განხილული არალოკალური პირობები და მათი განზოგადებები გამოიყენება სხვადასხვა დარგში, კერძოდ, ეკოლოგიაში, გარემოს ბუნებრივი თვითგაწმენდის შედეგად დაბინძურების შემცირების მათემატიკური მოდელირებისათვის [13].

არაკლასიკური ამოცანები არალოკალური საწყისი პირობებით წრმოადგენენ კლასიკური და დროითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანების განზოგადებას და შეიძლება განხილული იყვნენ, როგორც საწყისი პირობებით მართვის ამოცანები. დროით არალოკალური ამოცანები პარაბოლური განტოლებებისათვის განხილული იყო [14] ნაშრომში და, შემდგომში, საწყის-სასაზღვრო ამოცანები არალოკალური საწყისი პირობებით შესწავლილი იყო [15-22] ნაშრომებში. ამ ტიპის არაკლასიკური ამოცანები გამოიყენება სტოქსის სითხეში რადიონუკლიდების გავრცელების, ფოროვან გარემოში დიფუზიის და დინების პროცესების გამოკვლევისას.

სამაგისტრო ნაშრომი შედგება ორი თავისაგან. პირველ თავში მოყვანილი მასალა ეფუძნება [22] ნაშრომში მიღებულ შედეგებს, ხოლო მეორე თავში მიღებულია ახალი შედეგები, რომლებიც წარმოადგენენ [20, 21] ნაშრომების შედეგების განზოგადებას.

პირველი თავში განხილულია არაკლასიკური ამოცანა აბსტრაქტული პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებისათვის დროზე დამოკიდებული V -კოერციტიული ოპერატორით და არალოკალური ოპერატორით განსაზღვრული საწყისი პირობით. მოყვანილია არალოკალური ამოცანის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემები კომპაქტური და არაკომპაქტური არალოკალური ოპერატორების შემთხვევაში. განხილულია კლასიკური ამოცანებით მიმდევრობით მიახლოების ალგორითმი. მოყვანილია აბსტრაქტული შედეგების გამოყენება პარაბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის დროით არალოკალური საწყის-სასაზღვრო ამოცანებისათვის.

მეორე თავში გამოკვლეულია არაკლასიკური ამოცანა შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის დროითი ცვლადის მიმართ აბსტრაქტულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეებში მნიშვნელობებით ჰილბერტის სივრცეებში და არალოკალური ოპერატორით განსაზღვრული საწყისი პირობით, როდესაც განტოლების ძირითადი ოპერატორი წარმოადგენს დროით ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციის ნამრავლს V -კოერციტიულ ოპერატორზე. დამტკიცებულია არალოკალური ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები კომპაქტური და არაკომპაქტური არალოკალური ოპერატორების შემთხვევაში. განხილულია და გამოკვლეულია არალოკალური ამოცანის კლასიკური ამოცანებით აპროქსიმაციის ალგორითმი. მოყვანილია მიღებული აბსტრაქტული შედეგების გამოყენება შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის დროით არალოკალური საწყის-სასაზღვრო ამოცანებისათვის.

თავი 1

დროით არალოკალური ამოცანები პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებებისათვის

1.1. არალოკალური ამოცანის ჩამოყალიბება აბსტრაქტულ სივრცეებში ევოლუციური განტოლებებისათვის

პირველ თავში ჩვენ შევისწავლით პირველი რიგის პარაბოლური განტოლებებისა და სისტემებისათვის დასმულ საწყის-სასაზღვრო ამოცანებს არალოკალური საწყისი პირობებით, რომლებიც წარმოადგენენ აბსტრაქტულ ჰილბერტის სივრცეებში პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებებისათვის არალოკალური ამოცანების კერძო შემთხვევას. ამიტომ ჩვენ ჯერ გამოვიკვლევთ არალოკალურ ამოცანებს აბსტრაქტულ სივრცეებში.

იმისათვის, რომ ჩამოვაყალიბოთ არალოკალური ამოცანა აბსტრაქტული პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებებისათვის შემოვიტანოთ შესაბამისი სივრცეები. ვთქვათ V და H სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეებია ისეთი, რომ V მკვრივია H -ში და უწყვეტად არის მასში ჩადგმული. H სივრცე გავაიგივოთ თავის შეუღლებულთან H -ში სკალარული $(\cdot, \cdot)_H$ ნამრავლის გამოყენებით. აღნიშნულის გათვალისწინებით გვექნება სივრცეების სამეული $V \subset H \subset V'$ უწყვეტი და მკვრივი ჩადგმებით, სადაც V' არის V -ს შეუღლებული სივრცე. X და Y ბანახის სივრცეებისათვის $\mathcal{L}(X; Y)$ აღვნიშნავთ წრფივ უწყვეტ ოპერატორთა სივრცეს X -დან Y -ში. $C^0([0, T]; X)$ წარმოადგენს უწყვეტ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეს $[0, T]$ -ზე მნიშვნელობებით X სივრცეში. $L^2(0, T; X)$ აღვნიშნავთ ისეთ ზომად $g: (0, T) \rightarrow X$ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეს, რომელთათვისაც $\|g\|_X \in L^2(0; T)$. ყოველ $g \in L^2(0, T; X)$ ვექტორ-ფუნქციას ჩვენ გავაიგივებთ ვექტორულ განაწილებასთან $(0, T)$ -ზე მნიშვნელობებით X -ში და მის წარმოებულს განაწილებების აზრით აღვნიშნავთ $g' = \frac{dg}{dt} \in \mathcal{D}'((0, T); X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); X)$ [24], სადაც $\mathcal{D}(0, T)$ უსასრულოდ დიფერენცირებად ფუნქციათა სივრცეა კომპაქტური საყრდენით $(0, T)$ -ში. $\mathbb{R}^p$ -თი, $p \in \mathbb{N}$, აღვნიშნოთ p განზომილებიან $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^p$ ვექტორთა სივრცე სკალარული ნამრავლით $(\vec{x}, \vec{y})_p = \sum_{j=1}^p x_j y_j$ და ნორმით $\|\vec{x}\|_p^2 = (\vec{x}, \vec{x})_p$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p$. $\mathbb{R}^{p \times p}$ -ით აღვნიშნავთ p რიგის კვადრატულ მატრიცთა

სიმრავლეს ნამდვილი ელემენტებით, ხოლო $\|M\|_s$ -ით $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ მატრიცის სპექტრული ნორმას.

ვთქვათ, $A(t) \in \mathcal{L}(V; V')$, $t \in (0, T)$, წარმოადგენს წრფივ თვითშეუღლებულ თანაბრად შემოსაზღვრული და თანაბრად V -კოერციტიულ ოპერატორთა ოჯახს, ე.ი. ამ ოპერატორების შესაბამისი ორადწრფივი ფორმების ოჯახი $a(t; v, w) = \langle A(t)v, w \rangle$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} |a(t; v, w)| &\leq c_a \|v\|_V \|w\|_{V'}, \\ a(t; v, w) &= a(t; w, v), \quad a(t; v, v) \geq \hat{c}_a \|v\|_V^2, \end{aligned} \quad \forall v, w \in V, \quad (1.1)$$

თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ სადაც $c_a, \hat{c}_a = \text{const} > 0$ და $\langle \cdot, \cdot \rangle$ წარმოადგენს შეუღლების მიმართებას V და V' სივრცეებს შორის. აგრეთვე ვიგულისხმობთ, რომ ფუნქცია $t \mapsto a(t; v, w)$ არის ზომადი ნებისმიერი $v, w \in V$, და თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის არსებობს $A(t)$ ოპერატორების საკუთრივი ვექტორების $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ სისტემა, რომელიც შეესაბამება საკუთრივ მნიშვნელობებს $\{|\lambda_k(t)|^2\}_{k \in \mathbb{N}}$, ე.ი. $a(t; v_k, w) = |\lambda_k(t)|^2 (v_k; w)_H$ ნებისმიერი $w \in V$ -თვის. $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ელემენტთა სისტემა არის სრული V -ში და ორთონორმირებული H -ში. (1.1) პირობებიდან მივიღებთ, რომ $|\lambda_k(t)|^2 = a(t; v_k, v_k) \leq c_a \|v_k\|_V^2$, შესაბამისად ფუნქციები λ_k ეკუთვნიან $L^\infty(0, T)$ -ს ყველა $k \in \mathbb{N}$ -თვის.

განვიხილოთ არაკლასიკური ამოცანა არალოკალური საწყისი პირობით პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებისათვის, რომლის ვარიაციულ ფორმულირებას აქვს შემდეგი სახე: ვიპოვოთ უცნობი ვექტორ-ფუნქცია $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H)$, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), v)_H + a(\cdot; u(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (1.2)$$

$(0, T)$ -ზე განაწილებების აზრით, და არალოკალურ საწყის პირობას

$$u(0) = Bu + u_0, \quad (1.3)$$

სადაც u_0 და f მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია და $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ არალოკალური ოპერატორია. შევნიშნოთ, რომ აბსტრაქტული არალოკალური ამოცანა (1.2), (1.3) პარაბოლური განტოლებებისა და სისტემებისათვის დროით არალოკალური ამოცანის გაზოგადებაა.

არალოკალური ოპერატორი B ცალსახად განსაზღვრავს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალებს

$$b_{jk}(\xi) = (B(\xi v_k), v_j)_H, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}, \quad \xi \in C^0[0, T], \quad (1.4)$$

რომლებიც საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ოპერატორი $\tilde{B}^p : C^0([0, T]; \mathbb{R}^{p \times p}) \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$, $p \geq 1$,

$\tilde{B}^p(F) = G$, $G_{jk} = \sum_{r=1}^p b_{jr}(F_{rk})$, $j, k = 1, \dots, p$, ნებისმიერი მატრიცული ფუნქციისათვის $F = (F_{rk}) \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{p \times p})$.

შემდგომში $A_p^s(t)$ -ით ჩვენ აღვნიშნავთ დიაგონალურ მატრიცს (j, j) ელემენტით, $|\lambda_j(t)|^s$, $1 \leq j \leq p$, ნებისმიერი ნამდვილი s რიცხვისათვის, $\exp\left(-\int_0^t A_p^s(\tau) d\tau\right)$ არის დიაგონალური მატრიცი (j, j) წევრით $\exp\left(-\int_0^t |\lambda_j(\tau)|^s d\tau\right)$, $1 \leq j \leq p$.

1.2. არალოკალური ამოცანის გამოკვლევა ევოლუციური განტოლებისათვის

ამ პარაგრაფში ჩვენ გამოვიკვლევთ არალოკალური (1.2), (1.3) ამოცანის ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას არალოკალურ B ოპერატორზე სხვადასხვა პირობებში. არაკლასიკური (1.2), (1.3) ამოცანისათვის სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.1. ვთქვათ $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ ოპერატორი კომპაქტურია და არსებობს მუდმივი $\beta > 0$ ისეთი, რომ

$$\left\| \left(I - \tilde{B}_k \left(\exp \left(- \int_0^t A_k^2(\tau) d\tau \right) \right) \right) \right\|_s^{-1} \leq \beta, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

თუ $u_0 \in H$ და $f \in L^2(0, T; V')$, მაშინ (1.2), (1.3) არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\max\{\|u\|_{C^0([0, T]; H)}, \|u\|_{L^2(0, T; V)}\} \leq c \left(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0, T; V')} \right). \quad (1.6)$$

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად ჯერ ვაჩვენოთ ამონახსნის არსებობა. (1.2), (1.3) ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n, \quad u_n(t) = \exp(\zeta_n(t)) d_n + \eta_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

სადაც

$$\zeta_n(t) = - \int_0^t |\lambda_n(s)|^2 ds, \quad \eta_n(t) = \int_0^t \exp(\zeta_n(t) - \zeta_n(\tau)) f_n(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$f_n(t) = \langle f(t), v_n \rangle$, ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის, ხოლო d_n უცნობი კოეფიციენტებია, რომელთათვისაც, (1.7) მწკრივის ფორმალურად ჩასმით (1.2) პირობაში, მივიღებთ შემდეგ უსასრულო სისტემას:

$$d_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\exp(\zeta_p(t)) \right) d_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\int_0^t \exp(\zeta_p(t) - \zeta_p(\tau)) f_p(\tau) d\tau \right) + \varphi_k, \quad (1.8)$$

სადაც $\varphi_k = (u_0, v_k)_H$, ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ -თვის, (1.8) სისტემა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ოპერატორული ფორმით

$$\vec{d} = B\vec{d} + \vec{\psi}$$

$\vec{d} = (d_1, d_2, \dots) = (d_k)_{k=1}^{\infty}$ რიცხვითი მიმდევრობების სივრცეში, სადაც

$$B\vec{h} = \vec{r}, \quad \vec{h} = (h_k)_{k=1}^{\infty}, \vec{r} = (r_k)_{k=1}^{\infty}, \quad r_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\exp(\zeta_p(t)) \right) h_p, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\vec{\psi} = (\psi_k)_{k=1}^{\infty}, \quad \psi_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}(\eta_p) + \varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ვაჩვენოთ, რომ B შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ოპერატორი l_2 სივრციდან l_2 სივრცეში, სადაც l_2 წარმოადგენს რიცხვითი $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots) = (h_k)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობის სივრცეს, რომელთათვისაც $\|\vec{h}\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 < \infty$.

მართლაც, ვთქვათ $\vec{h} \in l_2$ და განვიხილოთ შესაბამისი მწკრივი

$$w^{\vec{h}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k,$$

რომელიც იქნება თანაბრად კრებადი H -ში, რადგან $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივი ვექტორების H სივრცეში ორთონორმირებულობის ძალით

$$\left\| \sum_{k=n}^m \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k \right\|_H^2 \leq \sum_{k=n}^m \left(\exp(\zeta_k(t)) \right)^2 (h_k)^2 \leq \sum_{k=n}^m (h_k)^2, \quad \forall n \leq m, n, m \in \mathbb{N}.$$

აქედან გამომდინარე, $w^{\vec{h}} \in C^0([0, T]; H)$, ამიტომ $Bw^{\vec{h}} \in H$. $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივი ვექტორების H სივრცეში სისრულის და პარსევალის ტოლობის ძალით $\|w\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(w, v_k)_H|^2$, ნებისმიერი $w \in H$ -თვის, ე.ი. H სივრცე l_2 -ის იზომეტრულია, და B ოპერატორის უწყვეტობის ძალით გვექნება:

$$\|Bw^{\vec{h}}\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Bw^{\vec{h}}, v_k)_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (r_k)^2 \leq c \max_{t \in [0, T]} \|w^{\vec{h}}(t)\|_H^2 = c \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 = c \|\vec{h}\|_{l_2}^2.$$

აქედან გამომდინარე, $B\vec{h} \in l_2$ და $B: l_2 \rightarrow l_2$ არის წრფივი და უწყვეტი ოპერატორი.

ამავე დროს, თუ $\vec{h} \in \vec{M} \subset l_2$, $\vec{M}$ არის შემოსაზღვრული სიმრავლე l_2 -ში, მაშინ შესაბამისი $w^{\vec{h}}$ ვექტორ-ფუნქციათა სიმრავლე $M = \{w^{\vec{h}}; \vec{h} \in \vec{M}\}$ იქნება შემოსაზღვრული $C^0([0, T]; H)$ სივრცეში. B ოპერატორის კომპაქტურობიდან გამომდინარეობს რომ, $B(M)$

არის ფარდობითად კომპაქტური H -ში და, H სივრცის და l_2 -ის იზომეტრულობის ძალით, $B(\vec{M})$ არის ფარდობითად კომპაქტური l_2 -ში, ე.ი. $B: l_2 \rightarrow l_2$ არის კომპაქტური ოპერატორი.

ვინაიდან $\{A(t)\}$ თანაბრად V -კოერციტიული ოპერატორებია თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის, ამიტომ ლაქს-მილგრემის თეორემის ძალით არსებობს თანაბრად შემოსაზღვრული შებრუნებული ოპერატორები $\{[A(t)]^{-1}\}$ [25]. აქედან გამომდინარე, თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის არსებობს $v^{f(t)} = [A(t)]^{-1}f(t) \in V$ და რადგან $\{[A(t)]^{-1}\}$ თანაბრად შემოსაზღვრული ოპერატორებია, ამიტომ $[A(t)]^{-1}f(t) \in L^2(0, T; V)$ და

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \exp(\zeta_k(t) - \zeta_k(\tau)) f_k(\tau) d\tau \right|^2 = \left| \int_0^t \exp(\zeta_k(t) - \zeta_k(\tau)) \langle A(\tau) v^{f(\tau)}, v_k \rangle d\tau \right|^2 \\ & = \left| \int_0^t \exp(\zeta_k(t) - \zeta_k(\tau)) |\lambda_k(\tau)|^2 (v^{f(\tau)}, v_k)_H d\tau \right|^2 \leq \int_0^t |\lambda_k(\tau)|^2 |(v^{f(\tau)}, v_k)_H|^2 \\ & \quad \times \int_0^t |\lambda_k(\tau)|^2 \exp(2(\zeta_k(t) - \zeta_k(\tau))) d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_k(\tau)|^2 |(v^{f(\tau)}, v_k)_H|^2 d\tau. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_0^T |\lambda_k(\tau)|^2 |(v^{f(\tau)}, v_k)_H|^2 d\tau = \int_0^T a \left(\tau; \sum_{k=1}^n v_k^{f(\tau)} v_k, \sum_{k=1}^n v_k^{f(\tau)} v_k \right) d\tau \\ & \leq \int_0^T a(\tau; v^{f(\tau)}, v^{f(\tau)}) d\tau \leq c_a \| [A(t)]^{-1} f \|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq c \| f \|_{L^2(0, T; V')}^2, \end{aligned}$$

სადაც $v_k^{f(\tau)} = (v^{f(\tau)}, v_k)_H$, ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ -თვის. აქედან გამომდინარე, მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \exp(\zeta_k(t) - \zeta_k(\tau)) f_k(\tau) d\tau v_k$$

თანაბრად კრებადია H სივრცეში და

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t \exp(\zeta_k(t) - \zeta_k(\tau)) f_k(\tau) d\tau \right|^2 \leq c \| f \|_{L^2(0, T; V')}^2 \quad \forall t \in [0, T].$$

უკანასკნელი უტოლობიდან, B ოპერატორის უწყვეტობის გათვალისწინებით, ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left| \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}(\eta_p) \right|^2 + |\varphi_k|^2 \right) \\ & = 2 \left(\left\| B \left(\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p v_p \right) \right\|_H^2 + \| u_0 \|_H^2 \right) \leq c \left(\| f \|_{L^2(0, T; V')}^2 + \| u_0 \|_H^2 \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

ე.ი. $\vec{\psi} \in l_2$. ამრიგად, (1.8) სისტემისათვის სამართლიანია თეორემა ფრედჰოლმის ალტერნატივის შესახებ და ამიტომ ამონახსნის არსებობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ერთგვაროვან სისტემას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

ვთქვათ $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots) \in l_2$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი (1.8) სისტემის ამონახსნს. მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$, ამიტომ $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\zeta_k(t)) z_k v_k \in C^0([0; T]; H)$ და B ოპერატორის უწყვეტობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} B(\exp(\zeta_k(t)) z_k v_k)$ არის კრებადი H სივრცეში. აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ იარსებებს ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{p=m+1}^{\infty} B(\exp(\zeta_p(t)) z_p v_p) \right\|_H^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=m+1}^{\infty} z_p b_{kp}(\exp(\zeta_p(t))) v_k \right\|_H^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{p=m+1}^{\infty} z_p b_{kp}(\exp(\zeta_p(t))) \right)^2 < \varepsilon^2, \quad \forall m > N(\varepsilon), \end{aligned}$$

სადაც $\delta_k = \sum_{p=m+1}^{\infty} z_p b_{kp}(\exp(\zeta_p(t)))$ ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ -თვის. განვიხილოთ (1.8) ერთგვაროვანი სისტემის მხოლოდ პირველი m განტოლება, რომლებიც შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$z_k = \sum_{p=1}^m b_{kp}(\exp(\zeta_p(t))) z_p + \sum_{p=m+1}^{\infty} b_{kp}(\exp(\zeta_p(t))) z_p, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (1.10)$$

(1.10) სისტემიდან ვიპოვიტ

$$\vec{z}_m = \left(I - \tilde{B}_m \left(\exp \left(- \int_0^t A_m^2(\tau) d\tau \right) \right) \right)^{-1} \vec{\delta}_m,$$

სადაც $\vec{z}_m = (z_k)_{k=1}^m$, $\vec{\delta}_m = (\delta_k)_{k=1}^m$, (1.5) პირობის გამოყენებით, მივიღებთ

$$(\vec{z}_m, \vec{z}_m)_m \leq \beta^2 (\vec{\delta}_m, \vec{\delta}_m)_m \leq \beta^2 \sum_{p=1}^{\infty} |\delta_p|^2 \leq \beta^2 \varepsilon^2, \quad \forall m > N(\varepsilon),$$

სადაც $\varepsilon > 0$ შეიძლება ნებისმიერი მცირე დადებითი რიცხვის ტოლი იყოს, და ამიტომ $z_k = 0$, ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ -თვის.

აქედან გამომდინარე, ფრედჰოლმის ალტერნატივის გამოყენებით (1.8) ალგებრული განტოლებების უსასრულო სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\vec{d} \in l_2$ და ღია ასახვის შესახებ ბანახის თეორემის შედეგის [26] ძალით (1.8) სისტემის ამონახსნი უწყვეტად არის დამოკიდებული მონაცემებზე, ე.ი. $\|\vec{d}\|_{l_2} \leq c \|\vec{\psi}\|_{l_2}$. (1.8) სისტემის $\vec{d} \in l_2$ ამონახსნის

შესაბამისი (1.7) მწკრივი თანაბრად კრებადია t -ს მიმართ H სივრცეში და ამიტომ აგებული ვექტორ-ფუნქცია $u \in C^0([0, T]; H)$. (1.9) უტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|u\|_{C^0([0, T]; H)}^2 \leq c \left(\|f\|_{L^2(0, T; V')}^2 + \|u_0\|_H^2 \right). \quad (1.11)$$

(1.8) სისტემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ u აკმაყოფილებს (1.3) არალოკალურ საწყის პირობას. ვაჩვენოთ, რომ u არის (1.2) განტოლების ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ (1.7) მწკრივის $\tilde{u}^n(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) v_k$ ნაწილი თანაბრად კრებადია $u(t)$ -კენ, ე.ი. $\|u - \tilde{u}^n\|_{C^0([0, T]; H)} \rightarrow 0$ როცა $n \rightarrow \infty$, და ნებისმიერი $t \in [0, T]$ -თვის სრულდება ტოლობა

$$\frac{1}{2} \|\tilde{u}^n(t)\|_H^2 + \int_0^t a(\tau; \tilde{u}^n(\tau), \tilde{u}^n(\tau)) d\tau = \int_0^t \langle f(\tau), \tilde{u}^n(\tau) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \|\tilde{u}^n(0)\|_H^2, \quad n \geq 1,$$

საიდანაც ε -უტოლობის $|a_1 b_1| \leq \frac{1}{2\varepsilon} (a_1)^2 + \frac{\varepsilon}{2} (b_1)^2$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, გამოყენებით გვექნება

$$\frac{1}{2} \|\tilde{u}^n(t)\|_H^2 + \hat{c}_a \int_0^t \|\tilde{u}^n(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|f(\tau)\|_{V'}^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|\tilde{u}^n(\tau)\|_V^2 d\tau + \frac{1}{2} \|\tilde{u}^n(0)\|_H^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან, (1.11)-ის ძალით $0 < \varepsilon < 2\hat{c}_a$ -თვის, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|\tilde{u}^n(t)\|_H^2 + \int_0^t \|\tilde{u}^n(\tau)\|_V^2 d\tau \leq c \left(\|f\|_{L^2(0, T; V')}^2 + \|u_0\|_H^2 \right), \quad \forall t \in [0, T], n \geq 1.$$

ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $(\tilde{u}^n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა $(\tilde{u}^{n_1})_{n_1 \geq 1}$, რომელიც სუსტად კრებადია $\tilde{u}$ -კენ $L^2(0, T; V) \subset L^2(0, T; H)$ სივრცეში. რადგან $\tilde{u}^n$ ძლიერად კრებადია u -კენ $C^0([0, T]; H) \subset L^2(0, T; H)$ -ში, მივიღებთ, რომ $\tilde{u} = u$ და შესაბამისად $\tilde{u}^{n_1} \rightarrow u$ სუსტად $L^2(0, T; V)$ -ში, როცა $n_1 \rightarrow \infty$.

ვინაიდან $u_k(t)$ ფუნქციას თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის აქვს პირველი რიგის წარმოებული, რომელიც უდრის $-|\lambda_k(t)|^2 u_k(t) + f_k(t)$ და კვადრატში ინტეგრებადია $(0, T)$ ინტერვალზე, ამიტომ ნებისმიერი $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ -თვის, გვაქნება

$$-\int_0^T u_k(\tau) \psi'(\tau) d\tau = -\int_0^T |\lambda_k(\tau)|^2 u_k(\tau) \psi(\tau) d\tau + \int_0^T f_k(\tau) \psi(\tau) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}.$$

შევნიშნოთ, რომ $(\tilde{u}^n(t), v_k)_H = u_k(t)$, $a(t; \tilde{u}^n(t), v_k) = |\lambda_k(t)|^2 u_k(t)$, თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის, და ამიტომ

$$-\int_0^T \left(\tilde{u}^{n_1}(\tau), z_{n_1} \right)_H \psi'(\tau) d\tau + \int_0^T a\left(\tau; \tilde{u}^{n_1}(\tau), z_{n_1}\right) \psi(\tau) d\tau = \int_0^T \langle f(\tau), z_{n_1} \rangle \psi(\tau) d\tau, \quad \forall n_1 \in \mathbb{N},$$

სადაც z_n არის $v_1, \dots, v_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია. რადგან $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ სისტემა სრულია V -ში, თითოეული $v \in V$ -თვის არსებობს, $v_1, \dots, v_n$ -ის წრფივი კომბინაციების z_n მიმდევრობა, ისეთი რომ $z_n \rightarrow v$ ძლიერად V -ში, როცა $n \rightarrow \infty$. უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $n_1 \rightarrow \infty$, მივიღებთ, რომ $u \in L^2(0, T; V)$ ვექტორ-ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.2) განტოლებას $(0, T)$ -ში განაწილებების აზრით. ამავე დროს, (1.2) განტოლებისთვის ენერგეტიკული იგივეობის

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^t a(\tau; u(\tau), u(\tau)) d\tau = \int_0^t \langle f(\tau), u(\tau) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

ძალით და თითქმის ყველა $t \in [0, T]$ -თვის $a(t; \dots)$ ორადწრფივი ფორმის თანაბრად V -კოერციტიულობიდან, კოში-შვარცის უტოლობიდან ε -უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \varepsilon_a \int_0^t \|u(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|f(\tau)\|_V^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|u(\tau)\|_V^2 d\tau + \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

საიდანაც (1.11) გათვალისწინებით მივიღებთ (1.6) შეფასებას.

არალოკალური ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ ერთგვაროვანი (1.2), (1.3) ამოცანის ამონახსნი u უდრის გარკვეულ ელემენტს $u(0) \in H$ დროის საწყის $t = 0$ მომენტში. აქედან გამომდინარე, u წარმოადგენს (1.2), (1.3) ამოცანის ამონახსნს $u(0)$ საწყისი პირობით, რომელსაც გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და ის შეგვიძლია ჩავწეროთ $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k$ სახით. ერთგვაროვანი არალოკალური საწყისი პირობიდან ვღებულობთ, რომ ვექტორი $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots) \in l_2$ აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$h_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\exp(\zeta_p(t)) \right) h_p, \quad k \in \mathbb{N},$$

რომლებიც ემთხვევა ერთგვაროვან (1.8) სისტემას. ვინაიდან (1.8) სისტემას ნულოვანი მონაცემების შემთხვევაში გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ამიტომ $u \equiv 0$ და ამიტომ (1.2), (1.3) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. $\square$

შევნიშნოთ, რომ (1.2), (1.3) არაკლასიკური ამოცანის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა არალოკალური $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ ოპერატორი არ არის კომპაქტური, თუ მათ გააჩნიათ სამკუთხა სტრუქტურა. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.2. თუ $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ ოპერატორი აკმაყოფილებს $b_{jk} \equiv 0$, როცა $j < k, k = 2, 3 \dots$ და (1.5) პირობებს, მაშინ ნებისმიერი $u_0 \in H$ და $f \in L^2(0, T; V')$ -თვის, (1.2), (1.3) არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და სამართლიანია (1.6) შეფასება.

დამტკიცება. თეორემის პირობების ძალით ჩვენ შეგვიძლია ცხადად განვსაზღვროთ (1.8) სისტემის $\vec{d} \in l_2$ ამონახსნი. მართლაც, პირველი $n \in \mathbb{N}$ განტოლებიდან გვექნება:

$$\vec{d}_n = \left(I - \bar{B}_n \left(\exp \left(- \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau \right) \right) \right)^{-1} \vec{\psi}_n, \quad (1.12)$$

სადაც $\vec{d}_n = (d_k)_{k=1}^n$ და $\vec{\psi}_n = (\psi_k)_{k=1}^n$. (1.9) უტოლობის გათვალისწინებით, (1.12) ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|\vec{d}_n\|_n \leq \beta \|\vec{\psi}_n\|_n \leq c \left(\|f\|_{L^2(0, T; V')} + \|u_0\|_H \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ამრიგად, (1.8) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\vec{d} \in l_2$. აქედან გამომდინარე, (1.7) მწკრივი არის თანაბრად კრებადი H სივრცეში და თეორემა 1.1-ის დამტკიცებისას გამოყენებული მსჯელობით მივიღებთ, რომ ვექტორ-ფუნქცია u არის (1.2), (1.3) არალოკალური ამოცანის ამონახსნი, სამართლიანია (1.6) შეფასება და არალოკალურ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. $\square$

შევნიშნოთ, რომ $\{b_{jk}\}$ წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალების გამოყენებით, თუ ისინი აკმაყოფილებენ სათანადო პირობებს, შეგვიძლია ავაგოთ წრფივი უწყვეტი ოპერატორი B , რომელიც დააკმაყოფილებს (1.4) ტოლობას. თეორემის ჩამოსაყალიბებლად განვსაზღვროთ წრფივი ოპერატორები $\bar{B}_p: C^0([0, T]; \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $\bar{B}_p(\vec{\zeta}) = \vec{\xi}$, $\xi_j = \sum_{k=1}^p b_{jk}(\zeta_k)$, $j = 1, \dots, p$, ნებისმიერი $\vec{\zeta} = (\zeta_k)_{k=1}^p \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^p)$ -თვის.

თეორემა 1.3. თუ წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალები $b_{jk} \in \mathcal{L}(C^0([0, T]); \mathbb{R})$, $j, k \in \mathbb{N}$, აკმაყოფილებენ პირობას $\|\bar{B}_p(\vec{\zeta})\|_p \leq \hat{\beta} \max_{t \in [0, T]} \|\vec{\zeta}(t)\|_p$, ნებისმიერი $\vec{\zeta} \in \mathcal{L}(C^0([0, T]); \mathbb{R}^p)$, $p \in \mathbb{N}$, $\hat{\beta} = \text{const} > 0$, მაშინ არსებობს ოპერატორი $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.4) ტოლობას.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $C_L^0([0, T]; H)$ წრფივი ქვესივრცე, რომელიც შედგება y_{ν_k} ვექტორ-ფუნქციების კომბინაციებისაგან, $y \in C^0([0, T])$, $k \geq 1$, მკვრივია $C^0([0, T]; H)$ სივრცეში. მართლაც, ყოველი უწყვეტი ვექტორ-ფუნქცია $g \in C^0([0, T]; H)$ არის თანაბრად უწყვეტი $[0, T]$ -ზე და ამიტომ შესაბამისი მწკრივი

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) v_k, \quad g_k(t) = (g(t), v_k)_H, \quad k \geq 1, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.13)$$

არის თანაბრად კრებადი t -ს მიმართ H სივრცეში.

ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერი $N_2 \geq N_1$ წყვილისათვისა და $y_k v_k, y_k \in C^0([0, T])$, $N_1 \leq k \leq N_2$, ვექტორ-ფუნქციებისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N_1}^{N_2} \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}(y_k) v_j \right\|_H^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=N_1}^{N_2} b_{jk}(y_k) \right)^2 = \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^J \left(\sum_{k=N_1}^{N_2} b_{jk}(y_k) \right)^2 \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \left\| \bar{B}_J(\vec{y}_J(t)) \right\|_J^2 \leq \hat{\beta}^2 \max_{t \in [0, T]} \sum_{k=N_1}^{N_2} |y_k(t)|^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

სადაც $\vec{y}_N(t)$ არის N -კომპონენტური ($N > \max\{N_1, N_2\}$) ვექტორ-ფუნქცია, რომლის k -ური კომპონენტი არის y_k , $N_1 \leq k \leq N_2$, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები ნულის ტოლია. (1.14) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ მწკრივი $\sum_{k=N_1}^{N_2} \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}(y_k) v_j$ კრებადია H სივრცეში და ამიტომ (1.4) ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ B ოპერატორი $C_L^0([0, T]; H) \subset C^0([0, T]; H)$ წრფივ ქვესივრცეზე.

ვინაიდან (1.13) მწკრივი თანაბრად კრებადია H -ში, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\left\| \sum_{k=N_1}^{N_2} g_k(t) v_k \right\|_H^2 = \sum_{k=N_1}^{N_2} |g_k(t)|^2 < \varepsilon, \quad \forall N_2 \geq N_1 > N(\varepsilon), t \in [0, T].$$

(1.14) უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ მიმდევრობა $B(\sum_{k=1}^N g_k(t) v_k)$ კრებადია H სივრცეში, როცა $N \rightarrow \infty$ და რადგან $C_L^0([0, T]; H)$ მკვრივია $C^0([0, T]; H)$ სივრცეში, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $B: C^0([0, T]; H) \rightarrow H$ ოპერატორი შემდეგი სახით:

$$Bg = \lim_{N \rightarrow \infty} B \left(\sum_{k=1}^N g_k(t) v_k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}(g_k) v_j, \quad \forall g \in C^0([0, T]; H),$$

რომელიც იქნება წრფივი უწყვეტი ოპერატორი $C^0([0, T]; H)$ სივრციდან H -ში და დააკმაყოფილებს (1.4) ტოლობას. $\square$

1.3. ევოლუციური განტოლებისათვის არალოკალური ამოცანის აპროქსიმაცია კლასიკური ამოცანებით

აღსანიშნავია, რომ (1.2), (1.3) არალოკალური ამოცანას შეიძლება მივუახლოვდეთ კლასიკური ამოცანებით, როცა არალოკალური B ოპერატორი აკმაყოფილებს უფრო მკაცრ პირობებს ვიდრე მოყვანილია წინა პარაგრაფების თეორემებში.

განვიხილოთ კლასიკური ამოცანების შემდეგი მიმდევრობა: საძიებელია ვექტორ-ფუნქცია $w_n \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H)$ ისეთი, რომ

$$\frac{d}{dt}(w_n(\cdot), v)_H + a(\cdot; w_n(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (1.15)$$

$$w_n(0) = Bw_{n-1} + u_0, \quad n \geq 1 \quad (1.16)$$

სადაც $w_0 \equiv 0$. ნებისმიერი $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ ოპერატორისა და $u_0 \in H$ -თვის, $w_n(0) \in H$, $n \geq 1$. აქედან გამომდინარე, თუ $f \in L^2(0, T; V')$, მაშინ (1.15), (1.16) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი [24] ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის. გარკვეულ პირობებში არალოკალურ B ოპერატორზე $(w_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია (1.2), (1.3) არალოკალური ამოცანის ამონახსნისაკენ. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.4. ვთქვათ $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ ოპერატორი აკმაყოფილებს პირობებს $b_{jk} \equiv 0$, როცა $j < k$, $k = 2, 3, \dots$, და არსებობს დადებითი მუდმივი $\bar{\beta} < 1$ ისეთი, რომ

$$\left\| \tilde{B}_p \left(\exp \left(- \int_0^t A_p^2(\tau) d\tau \right) \right) \right\|_S \leq \bar{\beta}, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

თუ $u_0 \in H$ და $f \in L^2(0, T; V')$, მაშინ (1.2), (1.3) არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და (1.15), (1.16) ამოცანის ამონახსნთა $(w_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა მიისწრაფის (1.2), (1.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ $C^0([0, T]; H)$ და $L^2(0, T; V)$ სივრცეებში.

დამტკიცება. (1.17) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $p \in \mathbb{N}$ -თვის $\tilde{B}_p \left(\exp \left(- \int_0^t A_p^2(\tau) d\tau \right) \right)$ მატრიცა არის შებრუნებადი და

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I - \tilde{B}_p \left(\exp \left(- \int_0^t A_p^2(\tau) d\tau \right) \right) \right)^{-1} \right\|_S \\ & \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \tilde{B}_p \left(\exp \left(- \int_0^t A_p^2(\tau) d\tau \right) \right) \right\|_S^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\beta}^k = \frac{1}{1 - \bar{\beta}}, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

საიდანაც თეორემა 1.2-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ (1.2), (1.3) არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი .

ვაჩვენოთ, რომ (1.15), (1.16) კლასიკური ამოცანის ამონახსნთა $(w_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია (1.2), (1.3) არაკლასიკური ამოცანის u ამონახსნისაკენ. განვიხილოთ სხვაობა ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის $\theta_n(t) = u(t) - w_n(t)$, $n \geq 0$ და შევნიშნოთ, რომ θ_n არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$\frac{d}{dt}(\theta_n(\cdot), v)_H + a(\cdot; \theta_n(\cdot))v = 0, \quad \forall v \in V, \quad (1.18)$$

$$\theta_n(0) = B\theta_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (1.19)$$

ამ ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი შეგვიძლია ჩავწეროთ მწკრივის სახით

$$\theta_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\int_0^t |\lambda_j(\tau)|^2 d\tau\right) d_j^n v_j, \quad n \geq 0, \quad (1.20)$$

რომელიც ძლიერად კრებადია $C^0([0, T]; H)$ სივრცეში. (1.19) საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$d_j^n = \sum_{k=1}^j b_{jk} \left(\exp\left(-\int_0^t |\lambda_k(\tau)|^2 d\tau\right) \right) d_k^{n-1}, \quad j \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

ამ ტოლობიდან, (1.17) პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \|\vec{d}_j^n\|_j &= \left\| \vec{B}_j \left(\exp\left(-\int_0^t A_j^2(\tau) d\tau\right) \vec{d}_j^{n-1} \right) \right\|_j \\ &= \left\| \vec{B}_j^{n-1} \left(\exp\left(-\int_0^t A_j^2(\tau) d\tau\right) \vec{d}_j^1 \right) \right\|_j \leq \bar{\beta}^{n-1} \|u(0) - w_1(0)\|_H = \bar{\beta}^{n-1} \|Bu\|_H, \end{aligned} \quad (1.21)$$

სადაც $\vec{d}_j^n$ არის j კომპონენტებიანი ვექტორი, რომლის k -ური კომპონენტია d_k^n , $1 \leq k \leq j$.

უკანასკნელი უტოლობა გვაძლევს θ_n ნორმის შეფასებას

$$\begin{aligned} \|\theta_n(t)\|_H^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\exp\left(-\int_0^t |\lambda_j(\tau)|^2 d\tau\right) d_j^n \right)^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \exp\left(-\int_0^t A_j^2(\tau) d\tau\right) \vec{d}_j^n \right\|_j^2 \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \exp\left(-\int_0^t A_j^2(\tau) d\tau\right) \right\|_S^2 \|\vec{d}_j^n\|_j^2 \leq \bar{\beta}^{2(n-1)} \|Bu\|_H^2, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

მიღებული შეფასების ძალით $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - w_n\|_{C^0([0, T]; H)} = 0$. ამავე დროს, ვინაიდან კლასიკური (1.18), (1.19) ამოცანის ამონახსნი აკმაყოფილებს შემდეგ ენერგეტიკულ ტოლობას [24]:

$$\int_0^t a(\tau; \theta_n(\tau), \theta_n(\tau)) d\tau = \frac{1}{2} (\|\theta_n(0)\|_H^2 - \|\theta_n(t)\|_H^2), \quad \forall t \in [0, T],$$

ამიტომ $a(t; \dots)$, $t \in (0, T)$ ორადწრფივი ფორმის თანაბრად V -კოერციტიულობის ძალით მივიღებთ, რომ $\int_0^T \|\theta_n(\tau)\|_V^2 d\tau \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. $\square$

შევნიშნოთ, რომ (1.15), (1.16) იტერაციული ალგორითმის გამოყენებით (1.2), (1.3) არალოკალური ამოცანა შეიძლება გამოკვლეული იყოს იმ შემთხვევაშიც, როცა $A(t)$ ოპერატორი აკმაყოფილებს მხოლოდ (1.1) პირობას და $A(t)$ ოპერატორის სპექტრს არ გააჩნია თეორემა 1.1 და თეორემა 1.2-ში მოთხოვნილი თვისებები. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.5. ვთქვათ ოპერატორთა ოჯახი $A(t) \in \mathcal{L}(V; V')$, $t \in (0, T)$, აკმაყოფილებს (1.1) პირობას და არალოკალური $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ ოპერატორის ნორმა ერთზე ნაკლებია, ე.ი. $\|B\|_{\mathcal{L}} < 1$. თუ $u_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$, მაშინ (1.2), (1.3) დროით არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და სამართლიანია (1.6) შეფასება.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ ამონახსნის ერთადერთობა. თუ (1.2), (1.3) ამოცანას გააჩნია ორი ამონახსნი $u(t)$ და $\bar{u}(t)$, მაშინ მათი სხვაობა $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ იქნება ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების ამონახსნი ერთგვაროვანი არალოკალური საწყისი (1.3) პირობით. ენერგეტიკული იგივეობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $\tilde{u}(t)$ -თვის სამართლიანია იგივეობა:

$$\frac{1}{2} \|\tilde{u}(t)\|_H^2 + \int_0^t a(\tau; \tilde{u}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau = \frac{1}{2} \|\tilde{u}(0)\|_H^2 = \frac{1}{2} \|B\tilde{u}\|_H^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

უკანასკნელი ტოლობიდან კი a ფორმის V -კოერციტიულობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} \|\tilde{u}(t)\|_H^2 + \hat{c}_\alpha \int_0^t \|\tilde{u}(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \left(\frac{1}{2} \|\tilde{u}\|_{C^0([0, T]; H)}^2 + \hat{c}_\alpha \int_0^T \|\tilde{u}(\tau)\|_V^2 d\tau \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

საიდანაც თეორემის $\|B\|_{\mathcal{L}} < 1$ პირობის ძალით გვექნება $\tilde{u} \equiv 0$, რაც ამტკიცებს ამონახსნის ერთადერთობას.

არალოკალური (1.2), (1.3) ამოცანის ამონახსნის არსებობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ (1.15), (1.16) კლასიკური ამოცანათა მიმდევრობა, რომელსაც ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი w_n , როცა $A(t)$, $t \in (0, T)$, ოპერატორთა ოჯახი აკმაყოფილებს

(1.1) პირობას, $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); H)$ და $u_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$. შევნიშნოთ, რომ ვექტორ-ფუნქცია $\delta_n(t) = w_n(t) - w_{n-1}(t)$, $n \geq 1$ არის შემდეგი ამოცანის ამონახსნი:

$$\frac{d}{dt}(\delta_n(\cdot), v)_H + a(\cdot; \delta_n(\cdot), v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (1.22)$$

$$\delta_n(0) = B\delta_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (1.23)$$

ენერგეტიკული იგივეობის გამოყენებით, (1.22), (1.23) კლასიკური ამოცანისათვის, მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \|\delta_n(t)\|_H^2 + \int_0^t a(\tau; \delta_n(\tau), \delta_n(\tau)) d\tau = \frac{1}{2} \|\delta_n(0)\|_H^2 = \frac{1}{2} \|B\delta_{n-1}\|_H^2, \quad n \geq 2,$$

საიდანაც, (1.1) პირობასთან ერთად, გვექნება

$$\frac{1}{2} \|\delta_n\|_{C^0([0, T]; H)}^2 + \hat{c}_a \int_0^T \|\delta_n(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \|\delta_{n-1}\|_{C^0([0, T]; H)}^2, \quad n \geq 2.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან კი ვღებულობთ

$$\|\delta_n\|_{C^0([0, T]; H)} + \|\delta_n\|_{L^2(0, T; V)} \leq c \|B\|_{\mathcal{L}}^{n-1}, \quad c = \text{const} > 0, n \geq 1. \quad (1.24)$$

თეორემის $\|B\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(t)$ მწკრივი კრებადია $C^0([0, T]; H)$ და $L^2(0, T; V)$ სივრცეებში და მისი ზღვარი ალგნიშნით $u(t)$ -თი. რადგან $w_n(t) = \sum_{k=1}^n \delta_k$, ამიტომ $(w_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა არის კრებადი $u(t)$ ვექტორ-ფუნქციისაკენ $C^0([0, T]; H)$ და $L^2(0, T; V)$ სივრცეებში, და (1.15), (1.16)-ში ზღვარზე გადასვლით, როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ, რომ $u(t)$ არის (1.2), (1.3) არალოკალური ამოცანის ამონახსნი.

თეორემაში მოყვანილი (1.6) შეფასების მისაღებად განვიხილოთ ენერგეტიკული იგივეობა (1.2) განტოლებისთვის საწყისი $u(0)$ პირობით

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^t a(\tau; u(\tau), u(\tau)) d\tau = \int_0^t \langle f(\tau), u(\tau) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.25)$$

$a(t; \dots)$, $t \in (0, T)$, ორადწრფივი ფორმის თანაბრად V -კოერციტიულობის და (1.3) არალოკალური საწყისი პირობის გათვალისწინებით, ε -უტოლობის გამოყენებით (1.25) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \hat{c}_a \int_0^t \|u(\tau)\|_V^2 d\tau &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|f(\tau)\|_{V'}^2 d\tau + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|u(\tau)\|_V^2 d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \|Bu\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|Bu\|_H^2 + \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} \|u_0\|_H^2, \quad \forall t \in [0, T], 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

რადგან $\|B\|_{\mathcal{L}} < 1$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან, საკმარისად მცირე ε -თვის, გამომდინარეობს (1.6) შეფასების სამართლიანობა. $\square$

1.4. დროით არალოკალური ამოცანების გამოკვლევა პარაბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ წინა პარაგრაფებში აბსტრაქტულ პირველი რიგის ევოლუციური განტოლებისათვის მიღებული შედეგების გამოყენებას პარაბოლური განტოლებებისა და სისტემებისათვის დროით არალოკალური ამოცანებისათვის.

ვთქვათ $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, და $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \subset \mathbb{R}^p$, $p = p_1 + \dots + p_n$, წარმოადგენენ შემოსაზღვრულ ლიპშიცის არეებს საზღვრებით $\Gamma_i = \partial\Omega_i$, $\Gamma = \partial\Omega$ [21]. $H^r(D)$ -თი აღვნიშნოთ r რიგის სობოლევის სივრცე $L^2(D)$ მიმართ, რომელიც შედგება კვადრატში ჯამებადი ფუნქციებისაგან, რომელთა ყველა r რიგამდე განზოგადებული კერძო წარმოებულები ეკუთვნის $L^2(D)$ -ს, სადაც $D \subset \mathbb{R}^M$ არის შემოსაზღვრული ლიპშიცის არე. უსასრულოდ გლუვ D -ში კომპაქტური საყრდენის მქონე ფუნქციათა $\mathfrak{D}(D)$ სიმრავლის ჩაკეტვა $H^r(D)$ -ში აღვნიშნოთ $H_0^r(D)$ -თი, ხოლო $H^{-r}(D)$ -ით კი შესაბამისი შეუღლებული სივრცე. N -კომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathfrak{H}_0^r(D) = [H_0^r(D)]^N$, $\mathfrak{L}^2(D) = [L^2(D)]^N$, $\mathfrak{H}^{-r}(D) = [H^{-r}(D)]^N$.

განვიხილოთ მეორე რიგის დროით ცვლადზე დამოკიდებული წრფივ ელიფსურ ოპერატორთა ოჯახი $A(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) A_i$, თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის,

$$A_i \equiv - \sum_{i_1=1}^{p_i} \sum_{j_1=1}^{p_i} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}^{j_1}} \left(A_{i_1 j_1}^i(x^i) \frac{\partial}{\partial x_{j_1}^{i_1}} \right) + A_0^i(x^i), \quad x^i = (x_1^i, \dots, x_{p_i}^i) \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

სადაც $A_{i_1 j_1}^i(x^i)$ წარმოადგენს N რიგის კვადრატულ მატრიცს, რომელიც გადადის შეუღლებულში ქვედა ინდექსების გადანაცვლებისას. ვიგულისხმობთ, რომ ყველა $\alpha_i(t) \in L^\infty(0, T)$ და $\alpha_i(t) \geq c_{\alpha_i} = \text{const} > 0$, $i = 1, \dots, n$, თითქმის ყველგან $(0, T)$ -ში, $A_{i_1 j_1}^i(x^i)$ მატრიცების ელემენტები ეკუთვნიან $L^\infty(\Omega_i)$ და თითქმის ყველა $x^i \in \Omega_i$ -თვის სრულდება შემდეგი დადებითად განსაზღვრულობის პირობები

$$\left(\sum_{i_1=1}^{p_i} \sum_{j_1=1}^{p_i} A_{i_1 j_1}^i(x^i) \vec{b}_{j_1}, \vec{b}_{i_1} \right)_N \geq c \sum_{i_1=1}^{p_i} \|\vec{b}_{i_1}\|_N^2, \quad c = \text{const} > 0, \quad (A_0^i(x^i) \vec{b}, \vec{b})_N \geq 0, \quad (1.26)$$

სადაც $\vec{b}_{i_1}$ ($i_1 = 1, \dots, p_i$), $\vec{b}$ ნებისმიერი N -კომპონენტიანი ვექტორებია.

შევნიშნოთ, რომ $L^2(\Omega)$ სივრცის ფუნქციის განზოგადებული კერძო წარმოებულები ეკუთნიან $H^{-1}(\Omega)$ -ს და ვინაიდან $L^2(\Omega)$ ფუნქციის გამრავლება $L^\infty(\Omega)$ სივრცის ფუნქციაზე ტოვებს მას იმავე სივრცეში, ამიტომ ნებისმიერი $v \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ ვექტორ-ფუნქციისათვის $A(t)v \in \mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$, და $A(t)$ წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ოპერატორს $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ სივრციდან $\mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$

სივრცეში, თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის. ანალოგიურად, თითოეული ოპერატორი A_i ($i = 1, \dots, n$) არის უწყვეტი $\mathfrak{H}_0^1(\Omega_i)$ სივრციდან $\mathfrak{H}^{-1}(\Omega_i)$ სივრცეში. (1.26) პირობებიდან პუნკარეს უტოლობის [26] გამოყენებით მიიღება, რომ $A(t)$ და A_i ($i = 1, \dots, n$) ოპერატორები თვითშეუღლებულია და თანაბრად V -კოერციტიული, ე.ი. კმაყოფილდება (1.1) პირობა, როცა, შესაბამისად, $V = \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ და $V = \mathfrak{H}_0^1(\Omega_i)$. $H_0^1(\Omega_i)$ სივრცის $L^2(\Omega_i)$ -ში ($i = 1, \dots, n$) უწყვეტი ჩადგმის სიმკვრივისა და კომპაქტურობის ძალით, თვითშეუღლებული და V -კოერციტიული ოპერატორებისათვის ზოგადი თეორემის გამოყენებით [21], არსებობს $A_i: \mathfrak{H}_0^1(\Omega_i) \rightarrow \mathfrak{H}^{-1}(\Omega_i)$ ოპერატორის $\mathfrak{H}^2(\Omega_i)$ -ში ორთონორმებულ $\mathfrak{H}_0^1(\Omega_i)$ -ში სრულ საკუთრივ ფუნქციათა $\{v_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_0^1(\Omega_i)$ სისტემა, რომლებიც შეესაბამება საკუთრივ მნიშვნელობებს $\{|\lambda_{i,k}|^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ და ამასთან $0 < |\lambda_{i,1}|^2 \leq |\lambda_{i,2}|^2 \leq \dots, |\lambda_{i,k}|^2 \rightarrow \infty$, როცა $k \rightarrow \infty$.

განვიხილოთ დროით არალოკალური ამოცანა პარაბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.27)$$

არალოკალური საწყისი და ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით

$$u(\mathbf{x}, 0) = \sum_{j=1}^m \xi_j u(\mathbf{x}, T_j) + \int_0^T \rho(\tau) u(\mathbf{x}, \tau) d\tau + u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.28)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (1.29)$$

სადაც $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\xi_j \neq 0$, $0 < T_j \leq T$ ($1 \leq j \leq m$), $\rho \in L^1(0, T)$. $\Omega \times (0, T)$ -ზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციების გაიგივებით $(0, T)$ -ზე მოცემულ ვექტორ-ფუნქციებთან მნიშვნელობებით Ω -ზე განსაზღვრულ შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში, (1.27)-(1.29) არალოკალური ამოცანა შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ როგორც $C^0([0, T]; \mathfrak{H}^2(\Omega))$ ი $L^2(0, T; \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$ სივრცის ისეთი u ვექტორ-ფუნქციის პოვნის ამოცანა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.27) განტოლებას $\mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$ -ში მნიშვნელობების მქონე $(0, T)$ -ში განსაზღვრულ განაწილებათა $\mathcal{D}'((0, T); \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$ სივრცის აზრით, ხოლო (1.28) საწყის პირობას $\mathfrak{H}^2(\Omega)$ სივრცეში, სადაც $\partial u / \partial t$ კერძო წარმოებული ქვეშ იგულისხმება განზოგადებული წარმოებული $u' = du/dt \in \mathcal{D}'((0, T); \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$. აღსანიშნავია, რომ ამონახსნი $u \in C^0([0, T]; \mathfrak{H}^2(\Omega))$ ი $L^2(0, T; \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$ აკმაყოფილებს (1.29) სასაზღვრო პირობას, რადგან $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ სივრცის ვექტორ-ფუნქციის კვალი Ω -ს საზღვარზე ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე, (1.27)-(1.29) არალოკალური ამოცანა წარმოადგენს (1.2), (1.3) არალოკალური ამოცანის კერძო შემთხვევას და თეორემა 1.2-ის გამოყენებით მიიღება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.6. თუ $u_0 \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-r}(\Omega))$, $\min\{n, N\} = 1$ და არსებობს მუდმივი $\gamma > 0$ ისეთი, რომ

$$\left| 1 - \sum_{j=1}^m \xi_j \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(T_j)) - \int_0^T \rho(t) \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(t)) dt \right| \geq \gamma, \quad \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, \quad (1.30)$$

სადაც $\theta_{k_1 \dots k_n}(t) = \sum_{i=1}^n |\lambda_{i, k_i}|^2 \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau$, მაშინ (1.27)-(1.29) დროით არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $u \in C^0([0, T]; \mathfrak{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathfrak{H}_0^r(\Omega))$.

დამტკიცება. იმ შემთხვევაში, როცა $n = 1$, $\Omega = \Omega_1$ და $\{v_{1, k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ წარმოადგენს $A(t)$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციების სისტემას, შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობებით $\{|\lambda_k(t)|^2\}_{k \in \mathbb{N}}$, $|\lambda_k(t)|^2 = \alpha_1(t) |\lambda_{1, k}|^2$, რომლებიც არის ორთონორმირებული $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ სივრცეში და სრული $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ -ში. (1.28) არალოკალური პირობების შემთხვევაში $I - \tilde{B}_k \left(\exp \left(- \int_0^t A_k^2(\tau) d\tau \right) \right)$ მატრიცა არის დიაგონალური, რომლის დიაგონალზე მდგომი ელემენტებია

$$1 - \sum_{j=1}^m \xi_j \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(T_j)) - \int_0^T \rho(t) \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(t)) dt$$

და ამიტომ (1.30) პირობის ძალით სრულდება (1.5) პირობა. აქედან გამომდინარე, თეორემა 1.2-ის გამოყენებით მივიღებთ (1.27)-(1.29) არალოკალური ამოცანის ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას.

განვიხილოთ (1.27)-(1.29) არალოკალური ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა $n > 1$, ხოლო $N = 1$, ე.ი. ვიხილავთ არაკლასიკურ ამოცანას პარაბოლური განტოლებისათვის დროზე დამოკიდებული კოეფიციენტებით. შევნიშნოთ, რომ რომ $L^2(\Omega_1) \otimes \dots \otimes L^2(\Omega_n)$ სივრცე, რომელიც შედგება $g(\mathbf{x}) = g_1(x^1) \cdot \dots \cdot g_n(x^n)$ ფუნქციებისაგან, სადაც $g_i(x^i) \in L^2(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, n$, არის მკვრივი $L^2(\Omega)$ -ში [27]. ამავე დროს, $H_0^1(\Omega_1) \otimes \dots \otimes H_0^1(\Omega_n)$ სივრცე, რომლის ელემენტები $g(\mathbf{x})$ წარმოადგენენ $H_0^1(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, n$, სივრცეების $g_i(x^i)$ ფუნქციების ნამრავლებს, არის მკვრივი $H_0^1(\Omega)$ სივრცეში. მართლაც, ოპერატორები

$$\Delta_i \equiv \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j^i \partial x_j^i}, \quad \Delta_i: H_0^1(\Omega_i) \rightarrow H^{-1}(\Omega_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

და

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad \Delta: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

თვითშეუღლებული და V -კოერციტიულია, ე.ი. ორადწრფივი ფორმები

$$b_i(\check{v}_i, \hat{v}_i) = \sum_{j=1}^{p_i} \int_{\Omega_i} \frac{\partial \check{v}_i}{\partial x_j^i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j^i} dx^i, \quad b(v, \hat{v}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \int_{\Omega_i} \frac{\partial v}{\partial x_j^i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j^i} dx^1 \dots dx^n,$$

აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$b_i(\check{v}_i, \hat{v}_i) = b_i(\hat{v}_i, \check{v}_i), \quad b_i(\check{v}_i, \hat{v}_i) \leq c_{b_i} \|\check{v}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \|\hat{v}_i\|_{H^1(\Omega_i)},$$

$$b(v, \hat{v}) = b(\hat{v}, v), \quad b(v, \hat{v}) \leq c_b \|v\|_{H^1(\Omega)} \|\hat{v}\|_{H^1(\Omega)},$$

$$b_i(\hat{v}_i, \hat{v}_i) \geq \hat{c}_{b_i} \|\hat{v}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2, \quad b(v, v) \geq \hat{c}_b \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ნებისმიერი $\check{v}_i, \hat{v}_i \in H_0^1(\Omega_i)$ ($i = 1, \dots, n$), $v, \hat{v} \in H_0^1(\Omega)$. აქედან გამომდინარე, თითოეული $i = 1, \dots, n$ -თვის არსებობს Δ_i ოპერატორის საკუთრივი ვექტორების $\{w_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega_i)$ სისტემა, შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობებით $\{|\mu_{i,k}|^2\}_{k \in \mathbb{N}}$, რომლებიც ორთონორმირებულია $L^2(\Omega_i)$ -ში და სრულია $H_0^1(\Omega_i)$ -ში. ნებისმიერი წრფივი კომბინაციისათვის

$$\tilde{w}(\mathbf{x}) = \sum_k \beta_k w_k(\mathbf{x}), \quad w_k(\mathbf{x}) = w_{1,k_1}(x^1) \cdot \dots \cdot w_{n,k_n}(x^n),$$

$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, და ნებისმიერი $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ ფუნქციისათვის, გვექნება $w - \tilde{w} \in H_0^1(\Omega_i)$, თითქმის ყველა $\mathbf{x}^{i'} = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \Omega'_i = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$ -თვის და

$$\begin{aligned} b(\tilde{w}, w - \tilde{w}) &= \sum_k \beta_k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'_i} b_i(w_{i,k_i}, w - \tilde{w}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{j,k_j}(x^j) dx^{i'} \\ &= \sum_k \beta_k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'_i} |\mu_{i,k_i}|^2 (w_k, w - \tilde{w})_{L^2(\Omega)} = (\bar{w}, w - \tilde{w})_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

სადაც $\bar{w} = \sum_k \gamma_k w_k$, $\gamma_k = \beta_k \sum_{i=1}^n |\mu_{i,k_i}|^2$. რადგან $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი $\bar{\Omega}$ -ზე, ამიტომ $\Delta w \in L^2(\Omega)$ და $b(\dots)$ ორადწრფივი ფორმის V -კოერციტიულობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \hat{c}_b \|w - \tilde{w}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq b(w - \tilde{w}, w - \tilde{w}) = b(w, w - \tilde{w}) - b(\tilde{w}, w - \tilde{w}) \\ &= (\Delta w - \bar{w}, w - \tilde{w})_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta w - \bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \|w - \tilde{w}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

საიდანაც გვექნება $\|w - \tilde{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\hat{c}_b} \|\Delta w - \bar{w}\|_{L^2(\Omega)}$. ამ შეფასებიდან გამომდინარე, რომ $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ ფუნქციების სისტემა არის სრული $H_0^1(\Omega)$ -ში, რადგან $\mathcal{D}(\Omega)$ მკვრივია $H_0^1(\Omega)$ -ში და $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ არის სრული $L^2(\Omega)$ -ში. ვინაიდან $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ სისტემა არის $H_0^1(\Omega_1) \otimes \dots \otimes H_0^1(\Omega_n)$ სივრცის ქვესიმრავლე, ამიტომ ეს სივრცე არის მკვრივი $H_0^1(\Omega)$ -ში.

შევნიშნოთ, რომ $A_i: H_0^1(\Omega_i) \rightarrow H^{-1}(\Omega_i), i = 1, \dots, n$, ოპერატორების საკუთრივი $\{v_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ფუნქციების ნამრავლი $v_k(\mathbf{x}) = v_{1,k_1}(\mathbf{x}^1) \dots v_{n,k_n}(\mathbf{x}^n)$ ეკუთვნის $H_0^1(\Omega)$ -ს და სისტემა $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}^n} \subset H_0^1(\Omega)$ არის ორთონორმირებული $L^2(\Omega)$ სივრცეში,

$$(v_{k_1 \dots k_n}, v_{k'_1 \dots k'_n})_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega_1} v_{1,k_1} v_{1,k'_1} d\mathbf{x}^1 \cdot \dots \cdot \int_{\Omega_n} v_{n,k_n} v_{n,k'_n} d\mathbf{x}^n = \delta_{k_1 k'_1} \cdot \dots \cdot \delta_{k_n k'_n},$$

სადაც δ_{ij} წარმოადგენს კრონეკელის სიმბოლოს. ამავე დროს, რადგან $\{v_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ სრულია $H_0^1(\Omega_i)$ -ში, ამიტომ სისტემა $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ არის სრული $H_0^1(\Omega_1) \otimes \dots \otimes H_0^1(\Omega_n)$ სივრცეში, რომელიც არის მკვრივი $H_0^1(\Omega)$ -ში. ამრიგად, $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ არის სრული $H_0^1(\Omega)$ -ში. რადგან $\{v_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივ ფუნქციებს შეესაბამება $\{|\lambda_{i,k}|^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივი მნიშვნელობები, ამიტომ $a_i(v_{i,k} w_i) = |\lambda_{i,k}|^2 (v_{i,k}, w_i)_{L^2(\Omega_i)}$, ნებისმიერი $w_i \in H_0^1(\Omega_i)$ -თვის, $i = 1, \dots, n$, სადაც

$$a_i(\hat{w}_i, w_i) = \int_{\Omega_i} \left(\sum_{i_1, j_1=1}^{p_i} A_{i_1 j_1}^i(\mathbf{x}^i) \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x_{j_1}^i} \frac{\partial w_i}{\partial x_{i_1}^i} + A_0^i(\mathbf{x}^i) \hat{w}_i w_i \right) d\mathbf{x}^i, \quad \forall \hat{w}_i, w_i \in H_0^1(\Omega_i).$$

ორადწრფივი ფორმა, რომელიც შეესაბამება $A(t)$ ოპერატორს, აღვნიშნოთ $a(t; v, \hat{v}) = \langle A(t)v, \hat{v} \rangle$, ყველა $v, \hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ -თვის, სადაც

$$a(t; v, \hat{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \left(\sum_{i_1, j_1=1}^{p_i} A_{i_1 j_1}^i(\mathbf{x}^i) \frac{\partial v}{\partial x_{j_1}^i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_{i_1}^i} + A_0^i(\mathbf{x}^i) v \hat{v} \right) d\mathbf{x}.$$

აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $w = w_1(\mathbf{x}^1) \cdot \dots \cdot w_n(\mathbf{x}^n) \in H_0^1(\Omega_1) \otimes \dots \otimes H_0^1(\Omega_n)$ -თვის გვაქვს

$$a(t; v_k, w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \int_{\Omega_i'} a_i(v_k, w) d\mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) |\lambda_{i,k_i}|^2 (v_k, w)_{L^2(\Omega)},$$

საიდანაც, $H_0^1(\Omega_1) \otimes \dots \otimes H_0^1(\Omega_n)$ სიმრავლის $H_0^1(\Omega)$ სივრცეში სიმკვრივის ძალით გვექნება, რომ $a(t; v_k, v) = |\zeta_k(t)|^2 (v_k, v)_{L^2(\Omega)}$, ნებისმიერი $v \in H_0^1(\Omega)$ -თვის, სადაც $|\zeta_k(t)|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) |\lambda_{i,k_i}|^2$. ამრიგად, $L^2(\Omega)$ სივრცეში ორთონორმირებული ფუნქციები $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ წარმოადგენენ $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციებს, რომლებიც შეესაბამება $\{|\zeta_k(t)|^2\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ საკუთრივი მნიშვნელობებს თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის, და რადგან $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ სისტემა სრულია $H_0^1(\Omega)$ -ში, ამიტომ თეორემა 1.2-დან გამომდინარეობს, რომ (1.27)-(1.29) დროით არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. $\square$

შედეგი 1.1. თუ $u_0 \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$, $\min \{n, N\} = 1$ და

$$1 - \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j + |\xi_j|}{2} \geq \int_0^T |\rho(t)| dt,$$

მაშინ (1.27)-(1.29) არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი .

დამტკიცება. თეორემა 1.6-ის ძალით საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (1.30) პირობა. შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{j=1}^m \xi_j \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(T_j)) &\geq 1 - \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j + |\xi_j|}{2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,k_i}|^2 \alpha T_j\right) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j + |\xi_j|}{2} + \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j + |\xi_j|}{2} \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,k_i}|^2 \alpha T_j\right)\right), \end{aligned}$$

და

$$\left| \int_0^T \rho(t) \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,k_i}|^2 \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau\right) dt \right| \leq \int_0^T |\rho(t)| dt.$$

აქედან გამომდინარე, თუ $\xi_j > 0$ ერთი მაინც $j = 1, \dots, m$ -თვის, მაშინ (1.30) პირობა სამართლიანია როცა

$$\gamma = \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j + |\xi_j|}{2} \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,k_i}|^2 \alpha T_j\right)\right) > 0.$$

თუ ყველა $\xi_j < 0$, $j = 1, \dots, m$, და $\int_0^T |\rho(t)| dt < 1$, მაშინ (1.30) პირობა სრულდება როცა $\gamma = 1 - \int_0^T |\rho(t)| dt > 0$. იმ შემთხვევაში როცა $\int_0^T |\rho(t)| dt = 1$ და $\xi_j < 0$, ყველა $j = 1, \dots, m$ -თვის, არსებობს $0 < T_1 < T$ ისეთი, რომ $\int_0^{T_1} |\rho(t)| dt = \int_{T_1}^T |\rho(t)| dt = 1/2$. აქედან გამომდინარე, $\{|\lambda_{i,k}|^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივი მნიშვნელობების თვისებების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^T \rho(t) \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(t)) dt &\geq 1 - \int_0^T |\rho(t)| \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,1}|^2 c_{\alpha_i} t\right) dt \\ &\geq 1 - \int_0^{T_1} |\rho(t)| dt - \int_{T_1}^T |\rho(t)| \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,1}|^2 c_{\alpha_i} t\right) dt \geq \frac{1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,1}|^2 c_{\alpha_i} T_1\right)}{2}. \end{aligned}$$

ე.ი., (1.30) პირობა სამართლიანია, როცა $\gamma = \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n |\lambda_{i,1}|^2 c_{\alpha_i} T_1\right)\right)/2 > 0$. $\square$

შევნიშნოთ, რომ (1.28) არალოკალური საწყისი პირობის ინტეგრალურ წევრში სიმკვრივის ფუნქცია $\rho(t)$ 0-ის ტოლია $t = 0$ -ის მიდამოში, ე.ი. არსებებს $0 < T_0 < T$ ისეთი, რომ $\rho(t) = 0$, თითქმის ყველა $t \in (0, T_0)$ -თვის, მაშინ

$$D_{k_1 \dots k_n} = \sum_{j=1}^m \xi_j \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(T_j)) + \int_{T_0}^T \rho(t) \exp(-\theta_{k_1 \dots k_n}(t)) dt \rightarrow 0,$$

როცა $\min\{k_1 \dots k_n\} \rightarrow \infty$, რადგან $|\lambda_{i,k}|^2 \rightarrow \infty$, როცა $k \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, n$. აქედან გამომდინარე, ამ შემთხვევაში (1.27)-(1.29) დროით არალოკალური ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ $D_{k_1 \dots k_n} \neq 1$ $k_1, \dots, k_n$ ინდექსების მნიშვნელობების მხოლოდ სასრული რაოდენობისათვის. კერძოდ, სამართ-ლიანია შემდეგი დებულება.

შედეგი 1.2. თუ $u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$, $\min\{n, N\} = 1$ და $D_{k_1 \dots k_n} \neq 1$, როცა $1 \leq k_i \leq K_i$, $i = 1, \dots, n$, სადაც

$$K_i = \min \left\{ k_i \in \mathbb{N}; |\lambda_{i,k_i}|^2 > \frac{\ln \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j| + \int_{T_0}^T |\rho(t)| dt \right)}{n \min_{1 \leq i \leq n} c_{\alpha_i} \min_{0 \leq j \leq m} T_j} \right\},$$

მაშინ (1.27)-(1.29) არალოკალურ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

თავი 2

დროით არალოკალური ამოცანები შრედინგერის ტიპის განტოლებებისათვის

2.1. არალოკალური ამოცანის ჩამოყალიბება აბსტრაქტულ სივრცეებში შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის

მეორე თავში ჩვენ შევისწავლით შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის დასმულ საწყის-სასაზღვრო ამოცანებს არალოკალური საწყისი პირობებით, რომლებიც წარმოადგენენ აბსტრაქტულ ჰილბერტის სივრცეებში შრედინგერის ტიპის განტოლებებისათვის არალოკალური ამოცანების კერძო შემთხვევას. ამიტომ ჩვენ ჯერ გამოვიკვლევთ არალოკალურ ამოცანებს აბსტრაქტულ სივრცეებში.

იმისათვის, რომ ჩამოვაყალიბოთ არალოკალური ამოცანა შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის ჩვენ გამოვიყენებთ სივრცეებს კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ და i -თი აღვნიშნავთ წარმოსახვით ერთეულს. ვთქვათ V, H სეპარაბელური კომპლექსური ჰილბერტის სივრცეებია, V მკვრივია H -ში და უწყვეტად არის მასში ჩადგმული. H -ის გაიგივებით თავის ანტიშეუღლებულთან H -ში $(\cdot, \cdot)_H$ სკალარული ნამრავლის საშუალებით მივიღებთ სივრცეებს სამეულს $V \subset H \subset V^*$ უწყვეტი და მკვრივი ჩადგმებით, სადაც V^* წარმოადგენს V სივრცის ანტიშეუღლებულ სივრცეს. ვთქვათ $A \in \mathcal{L}(V; V^*)$ თვით-შეუღლებული V -კოერციტიული ოპერატორია, ე.ი. ანტიწრფივი ფორმა $a(v, w) = \langle Av, w \rangle_*$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq c_a^* \|v\|_V \|w\|_V, \\ a(v, w) &= \overline{a(w, v)}, \quad a(v, v) \geq \tilde{c}_a^* \|v\|_V^2, \quad c_a^*, \tilde{c}_a^* = \text{const} > 0, \quad \forall v, w \in V, \end{aligned} \quad (2.1)$$

სადაც $(\cdot, \cdot)_*$ -ით აღნიშნულია ანტიშეუღლების მიმართება V^* და V სივრცეებს შორის, $\bar{y}$ წარმოადგენს $y \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებულს, ხოლო y -ის მოდულს კი აღვნიშნავთ $|y|$ -ით. აგრეთვე ვიგულისხმობთ, რომ A ოპერატორის საკუთრივ ვექტორთა $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ სისტემა, რომლებიც შეესაბამება $\{|\lambda_k|^2\}_{k=1}^\infty$ საკუთრივ მნიშვნელობებს სრულია V სივრცეში და ორთონორმირებულია H სივრცეში.

განვიხილოთ დროით არალოკალური ამოცანა აბსტრაქტული შრედინგერის განტოლებისათვის

$$\frac{du}{dt} + i\alpha(t)Au = f, \quad t \in (0, T), \quad (2.2)$$

რომლის ვარიაციულ ფორმულირებას აქვს სახე: საძიებელია $u \in C^0([0, T]; V)$ ისეთი, რომ

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), v)_H + i\alpha(\cdot)a(u(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle_*, \quad \forall v \in V, \quad (2.3)$$

განტოლება სრულდება $(0, T)$ –ში განაწილებების აზრით და u აკმაყოფილებს შემდეგ არალოკალურ საწყის პირობას

$$u(0) = Bu + u_0, \quad (2.4)$$

სადაც $\alpha \in C^1([0, T])$, $\alpha(t) \geq c_\alpha = \text{const} > 0$, ნებისმიერი $t \in [0, T]$, u_0, f – მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია, $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$.

B ოპერატორი ცალსახად განსაზღვრავს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალებს $b_{jk}(\kappa) = B(\kappa v_k, v_j)_H$, $j, k \in \mathbb{N}$, $\kappa \in C^0([0, T]; \mathbb{C})$, რომელთა საშუალებით აიგება ოპერატორები $\hat{B}_p: C^0([0, T]; \mathbb{C}^{p \times p}) \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p}$, $p \geq 1$,

$$\hat{B}_p(F) = G, \quad G = (G_{jk}), \quad G_{jk} = \sum_{r=1}^p b_{jr}(F_{rk}), \quad j, k = \overline{1, p}, \quad \forall F = (F_{rk}) \in C^0([0, T]; \mathbb{C}^{p \times p}),$$

სადაც $\mathbb{C}^{p \times p}$ წარმოადგენს p რიგის მატრიცთა სიმრავლეს კომპლექსური ელემენტებით, რომელთა სპექტრალურ ნორმას აღვნიშნავთ $\| \cdot \|_{\mathbb{C}^{p \times p}}$. A_p არის დიაგონალური მატრიცა (j, j) ელემენტით $|\lambda_j|$, $1 \leq j \leq p$, ხოლო A_p^s კი დიაგონალური მატრიცა (j, j) ელემენტებით $|\lambda_j|^s$, $1 \leq j \leq p$, $s \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-iA_p^s \int_0^t \alpha(\tau) \frac{s}{2} d\tau\right)$ არის დიაგონალური მატრიცა (j, j) წევრით $\exp\left(-i|\lambda_j|^s \int_0^t \alpha(\tau) \frac{s}{2} d\tau\right)$, $1 \leq j \leq p$.

2.2. არალოკალური ამოცანის გამოკვლევა აბსტრაქტული

შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის

ამ პარაგრაფში ჩვენ გამოვიკვლევთ არალოკალური (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას არალოკალურ B ოპერატორზე სხვადასხვა პირობებში. არაკლასიკური (2.3), (2.4) ამოცანისათვის სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.1. ვთქვათ $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$ ოპერატორი კომპაქტურია და არსებობს მუდმივი $\beta = \text{const} > 0$ და $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ ისეთი, რომ

$$\left\| A_n^{-s} \left(I - \hat{B}_n \left(\exp \left(-i A_n^2 \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \right) \right)^{-1} A_n^{-1} \right\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

თუ $u_0 \in V$, $f, f' \in L^2(0, T; V^*)$, მაშინ დროით არალოკალურ (2.3), (2.4) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და სამართლიანია შეფასება

$$\|u\|_{C^0([0, T]; V)} \leq c(\|u_0\|_V + \|f\|_{L^2(0, T; V^*)} + \|f'\|_{L^2(0, T; V^*)}). \quad (2.6)$$

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად ჯერ ვაჩვენოთ ამონახსნის არსებობა. (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n, \quad u_n(t) = \exp(\zeta_n(t)) d_n + \eta_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

სადაც

$$\zeta_n(t) = -i|\lambda_n|^2 \int_0^t \alpha(s) ds, \quad \eta_n(t) = \int_0^t \exp(\zeta_n(t) - \zeta_n(\tau)) f_n(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$f_n(t) = \langle f(t), v_n \rangle_*$, ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის, ხოლო d_n უცნობი კოეფიციენტებია, რომელთათვისაც, (2.7) მწკრივის ფორმალურად ჩასმით (2.4) პირობაში, მივიღებთ შემდეგ უსასრულო სისტემას:

$$d_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\exp(\zeta_p(t)) \right) d_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\int_0^t \exp(\zeta_p(t) - \zeta_p(\tau)) f_p(\tau) d\tau \right) + \varphi_k, \quad (2.8)$$

სადაც $\varphi_k = (u_0, v_k)_H$, $k \in \mathbb{N}$. (2.7) სისტემა ჩავწეროთ ოპერატორული სახით $\vec{d} = \mathfrak{B}\vec{d} + \vec{\psi}$, $\vec{d} = (d_k)_{k=1}^{\infty}$ კომპლექსური რიცხვთა მიმდევრობების სივრცეში, სადაც

$$\mathfrak{B}\vec{h} = \vec{r}, \quad \vec{h} = (h_k)_{k=1}^{\infty}, \vec{r} = (r_k)_{k=1}^{\infty}, \quad r_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \left(\exp(\zeta_p(t)) \right) h_p, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\vec{\psi} = (\psi_k)_{k=1}^{\infty}, \quad \psi_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} (\eta_p) + \varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

a ფორმის (2.1) თვისებების გათვალისწინებით გვექნება

$$\check{c}_a^* \|w\|_V^2 \leq a(w, w) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |(w, v_k)_H|^2 \leq c_a^* \|w\|_V^2, \quad \forall w \in V,$$

ამიტომ V სივრცე კომპლექსური რიცხვების $\vec{h} = (h_k)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობების $\tilde{l}_2$ სივრცის იზომორფულია, რომელთათვისაც $\|\vec{h}\|_{\tilde{l}_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |h_k|^2 < \infty$.

ამავე დროს ნებისმიერი $\vec{h} = (h_k)_{k=1}^\infty \in \tilde{l}_2$ მიმდევრობისათვის შესაბამისი მწკრივი

$$w^{\vec{h}}(t) = \sum_{k=1}^\infty \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k,$$

თანაბრად კრებადია V -ში, რადგან $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივი ვექტორების განმარტების და H სივრცეში ორთონორმირებულობის ძალით $a(v_k, v_k) = |\lambda_k|^2$, $k \in \mathbb{N}$, და ამიტომ

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^m \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k \right\|_V^2 &\leq \frac{1}{c_a^*} a \left(\sum_{k=n}^m \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k, \sum_{k=n}^m \exp(\zeta_k(t)) h_k v_k \right) \\ &= \sum_{k=n}^m \left(\exp(\zeta_k(t)) \right)^2 |\lambda_k|^2 (h_k)^2 \leq \sum_{k=n}^m |\lambda_k|^2 (h_k)^2, \quad \forall n \leq m, n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ამასთან, ნორმა $\|w^{\vec{h}}\|_{C^0([0,T];V)}$ ექვივალენტურია $\|\vec{h}\|_{\tilde{l}_2}$.

აქედან გამომდინარე, $Bw^{\vec{h}} \in V$ და B -ს უწყვეტობის ძალით გვექნება

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 |r_k|^2 = a(Bw^{\vec{h}}, Bw^{\vec{h}}) \leq \frac{c_1 c_a^*}{\check{c}_a^*} \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 |h_k|^2 = \frac{c_1 c_a^*}{\check{c}_a^*} \|\vec{h}\|_{\tilde{l}_2}^2,$$

ამიტომ $\mathfrak{B}: \tilde{l}_2 \rightarrow \tilde{l}_2$ წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ოპერატორს. აგრეთვე, თუ $\tilde{Q}$ – შემოსაზღვრული სიმრავლეა $\tilde{l}_2$ -ში, მაშინ $Q = \{w^{\vec{h}}; \vec{h} \in \tilde{Q}\}$ სიმრავლე შემოსაზღვრული იქნება $C^0([0,T];V)$ – ში. B ოპერატორის კომპაქტურობის ძალით $B(Q)$ ფარდობითად კომპაქტურია V სივრცეში, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\mathfrak{B}(\tilde{Q})$ ფარდობითად კომპაქტურია $\tilde{l}_2$ სივრცეში და ამიტომ $\mathfrak{B}: \tilde{l}_2 \rightarrow \tilde{l}_2$ არის კომპაქტური ოპერატორი.

ჩადგმის თეორემის გამოყენებით [24] $f, f' \in L^2(0,T;V^*)$ -დან გამომდინარეობს, რომ $f \in C^0([0,T];V^*)$ და

$$\begin{aligned} \eta_k(t) &= \int_0^t \exp\left(-i|\lambda_k|^2 \int_\tau^t \alpha(s) ds\right) \langle f(\tau), v_k \rangle_* d\tau = \frac{\exp\left(-i|\lambda_k|^2 \int_0^t \alpha(s) ds\right) \langle f(\tau), v_k \rangle_*}{i|\lambda_k|^2} \bigg|_0^t \\ &\quad - \frac{1}{i|\lambda_k|^2} \int_0^t \exp\left(-i|\lambda_k|^2 \int_\tau^t \alpha(s) ds\right) \left(\frac{\langle f'(\tau), v_k \rangle_*}{\alpha(\tau)} - \frac{\langle f(\tau), v_k \rangle_* \alpha'(\tau)}{\alpha^2(\tau)} \right) d\tau. \end{aligned}$$

A ოპერატორის V -კოერციტიულობის ძალით მას ექნება შემოსაზღვრული შეზღუდვებული (იხ. [21]), ამიტომ ნებისმიერი $t \in [0,T]$ –თვის იარსებებს $v^{f(t)} = A^{-1}f(t) \in V$, $A^{-1}f \in C^0([0,T];V)$ და თითქმის ყველა $t \in (0,T)$ იარსებებს $v^{f'(t)} = A^{-1}f'(t) \in V$, $A^{-1}f' \in L^2(0,T;V)$. აქედან გამომდინარე, $\eta_k(t)$ -თვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$|\eta_k(t)|^2 \leq 4 \left(\frac{|\langle f(t), v_k \rangle_*|^2}{|\lambda_k|^4 \alpha^2(t)} + \frac{|\langle f(0), v_k \rangle_*|^2}{|\lambda_k|^4 \alpha^2(0)} + \frac{1}{|\lambda_k|^4} \left| \int_0^t \exp\left(-i|\lambda_k|^2 \int_\tau^t \alpha(s) ds\right) \frac{\langle f'(\tau), v_k \rangle_*}{\alpha(\tau)} d\tau \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{|\lambda_k|^4} \left| \int_0^t \exp \left(-i|\lambda_k|^2 \int_\tau^t \alpha(s) ds \right) \frac{\langle f(\tau), v_k \rangle_* \alpha'(\tau)}{\alpha^2(\tau)} d\tau \right|^2 \\
& = 4 \left(\frac{|a(v^{f(t)}, v_k)|^2}{|\lambda_k|^4 \alpha^2(t)} + \frac{|a(v^{f(0)}, v_k)|^2}{|\lambda_k|^4 \alpha^2(0)} + \frac{1}{|\lambda_k|^4} \left| \int_0^t \exp \left(-i|\lambda_k|^2 \int_\tau^t \alpha(s) ds \right) \frac{a(v^{f'(\tau)}, v_k)}{\alpha(\tau)} d\tau \right|^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{|\lambda_k|^4} \left| \int_0^t \exp \left(-i|\lambda_k|^2 \int_\tau^t \alpha(s) ds \right) \frac{a(v^{f(\tau)}, v_k) \alpha'(\tau)}{\alpha^2(\tau)} d\tau \right|^2 \right) \\
& \leq 4 \left(\frac{|(v^{f(t)}, v_k)_H|^2}{(c_\alpha)^2} + \frac{|(v^{f(0)}, v_k)_H|^2}{(c_\alpha)^2} + \frac{T}{(c_\alpha)^2} \int_0^T |(v^{f'(\tau)}, v_k)_H|^2 d\tau \right. \\
& \quad \left. + \frac{T \max_{0 \leq t \leq T} |\alpha'(\tau)|^2}{(c_\alpha)^4} \int_0^T |(v^{f(\tau)}, v_k)_H|^2 d\tau \right), \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

ვინაიდან $v^f \in C^0([0, T]; V)$, ამიტომ $v^{f(t)} = \sum_{k=1}^\infty (v^{f(t)}, v_k)_H v_k$ მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0, T]$ -ზე V სივრცეში. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ იარსებებს $\delta > 0$, რომლისთვისაც

$$\|v^{f(t')} - v^{f(t'')}\|_V < \varepsilon, \quad \text{როცა } |t' - t''| < \delta.$$

$[0, T]$ მონაკვეთი დაყოფით ქვეშეაღლედა, რომელთა სიგრძე δ -ზე ნაკლებია და დაყოფის წერტილები აღვნიშნოთ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_q = T$. რადგან ყოველი $t \in [0, T]$ -თვის $v^{f(t)} \in V$ და $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t)}, v_k)_H|^2 \leq a(v^{f(t)}, v^{f(t)})$, ამიტომ მოიძებნება $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=N(\varepsilon)}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t_p)}, v_k)_H|^2 \leq \varepsilon^2, \quad p = 0, \dots, q.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $t \in [0, T]$ და ვთქვათ t_p წარმოადგენს იმ შუალედის ერთ-ერთ ბოლოს, რომელშიც მოხვდა t წერტილი. უკანასკნელი უტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N(\varepsilon)}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t)}, v_k)_H|^2 &= \sum_{k=N(\varepsilon)}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t)} - v^{f(t_p)} + v^{f(t_p)}, v_k)_H|^2 \leq \\
&\leq 2 \sum_{k=N(\varepsilon)}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t)} - v^{f(t_p)}, v_k)_H|^2 + 2 \sum_{k=N(\varepsilon)}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t_p)}, v_k)_H|^2 \leq \\
&\leq 2a(v^{f(t)} - v^{f(t_p)}, v^{f(t)} - v^{f(t_p)}) + 2\varepsilon^2 < 2(c_\alpha + 1)\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

ე.ი. $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 |(v^{f(t)}, v_k)_H|^2$ მწკრივი თანაბრად კრებადია. ამავე დროს, $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ საკუთრივი ვექტორების $a(v_k, v_k) = |\lambda_k|^2$, $k \in \mathbb{N}$,თვისების ძალით მივიღებთ:

$$\int_0^t a(v^{f'(\tau)}, v^{f'(\tau)}) d\tau \geq \sum_{k=1}^n \int_0^t |\lambda_k|^2 |(v^{f'(\tau)}, v_k)_H|^2 d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T],$$

საიდანაც გვექნება

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\eta_k|^2 &\leq c_1 \left(\|A^{-1}f(t)\|_V^2 + \|A^{-1}f(0)\|_V^2 + \int_0^t \|A^{-1}f(\tau)\|_V^2 d\tau + \int_0^t \|A^{-1}f'(\tau)\|_V^2 d\tau \right) \leq \\ &\leq c_2 \left(\|f(t)\|_{V^*}^2 + \|f(0)\|_{V^*}^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau + \int_0^t \|f'(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) v_k$ მწკრივი თანაბრად კრებადია V სივრცეში და

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) v_k \right\|_V^2 \leq c_3 \left(\|f\|_{C^0([0,T];V^*)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

ამიტომ B ოპერატორის უწყვეტობის და ჩადგმის ოპერატორის უწყვეტობის ძალით

$$\|f\|_{C^0([0,T];V^*)}^2 \leq c \left(\|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \right),$$

ვასკვნით, რომ $\vec{\psi} \in \tilde{l}_2$, ვინაიდან

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\psi_k|^2 &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \left(\left(\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}(\eta_p) \right)^2 + |\varphi_k|^2 \right) \\ &= 2 \left(a \left(B \left(\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p(t) v_p \right), B \left(\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p(t) v_p \right) \right) + a(u_0, u_0) \right) \\ &\leq c_4 \left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

ამრიგად, $\vec{\psi} \in \tilde{l}_2$ და (2.8) სისტემის ამონახსნის არსებობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

ვთქვათ $\vec{d}^0 = (d_k^0)_{k=1}^{\infty} \in \tilde{l}_2$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი (2.8) სისტემის ამონახსნს. მაშინ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} B(\exp(\zeta_k(t)) d_k^0 v_k)$ კრებადია V -ში, და ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის იარსებებს $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\lambda_p|^2 |\delta_p|^2 \leq c_5 \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} B(\exp(\zeta_k(t)) d_k^0 v_k) \right\|_V^2 < \varepsilon^2, \quad \forall m > N(\varepsilon),$$

სადაც $\delta_p = \sum_{k=m+1}^{\infty} d_k^0 b_{pk}(\exp(\zeta_k(t)))$, $p \in \mathbb{N}$. (2.8) სისტემის პირველი m განტოლებიდან განვსაზღვროთ $\vec{d}_m^0 = (I - \hat{B}_m(\exp(\zeta_m(t))))^{-1} \vec{\delta}_m$, სადაც $\vec{d}_m^0 = (d_k^0)_{k=1}^m$, $\vec{\delta}_m = (\delta_k)_{k=1}^m$. (2.5)

პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $\|A_m^{-s} \vec{d}_m^0\|_m^2 \leq \beta^2 \|A_m \vec{d}_m\|_m^2 < \beta^2 \varepsilon^2$, ნებისმიერი $m > N(\varepsilon)$, სადაც ε ნებისმიერი საკმარისად მცირე დადებითი რიცხვია, ამიტომ $\vec{d}^0 = 0$.

მაშასადამე, (2.8) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $\vec{d} \in \tilde{I}_2$ და სამართლიანია შეფასება და ღია ასახვის შესახებ ბანახის თეორემის შედეგის [26] ძალით (2.8) სისტემის ამონახსნი უწყვეტად არის დამოკიდებული მონაცემებზე, ე.ი. $\|\vec{d}\|_{\tilde{I}_2} \leq c_6 \|\vec{\psi}\|_{\tilde{I}_2}$. $\vec{d} \in \tilde{I}_2$ მიმდევრობის მიხედვით აგებული (2.7) მწკრივი იქნება თანაბრად კრებადი t -ს მიმართ V სივრცეში, $u \in C^0([0, T]; V)$, u აკმაყოფილებს (2.4) საწყის პირობას და (2.9)-ის ძალით სამართლიანია (2.6) შეფასება.

ვაჩვენოთ, რომ u წარმოადგენს (2.3) განტოლების ამონახსნს. მართლაც, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ სისტემის სისრულის გათვალისწინებით, ნებისმიერი $v \in V$ არსებობს $v_1, \dots, v_k$ -ს z_k წრფივი კომბინაციების მიმდევრობა ისეთი, რომ $z_k \rightarrow v$ V -ში, როცა $k \rightarrow \infty$. u_k ფუნქციას თითქმის ყველა $t \in (0, T)$ -თვის გააჩნია წარმოებული, რომელიც ტოლია $-i|\lambda_k|^2 \alpha(t) u_k(t) + \langle f(t), v_k \rangle_*$ და კვადრატში ჯამებადია $(0, T)$ ინტერვალზე. ამიტომ ყოველი უსასრულოდ დიფერენცირებადი ψ ფუნქციისათვის კომპაქტური საყრდენით $(0, T)$ -ში გვექნება

$$-\int_0^T (\tilde{u}^n(\tau), z_n)_H \psi'(\tau) d\tau + i \int_0^T \alpha(\tau) a(\tilde{u}^n(\tau), z_n) \psi(\tau) d\tau = \int_0^T \langle f(\tau), z_n \rangle_* \psi(\tau) d\tau,$$

ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის, სადაც $\tilde{u}^n$ -ით აღნიშნულია (2.7) მწკრივის პირველი n წევრისაგან შემდგარი მონაკვეთი. უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით ვღებულობთ, რომ u აკმაყოფილებს (2.3) განტოლებას.

არალოკალური ამოცანის ერთადერთობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ კოშის ამოცანას შრედინგერის ტიპის (2.3) განტოლებისათვის გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in C^0([0, T]; V)$ [24], რომელიც უდრის გარკვეულ ელემენტს $u(0) \in V$ დროის საწყის $t = 0$ მომენტში და ამიტომ წარმოიდგინება $u(t) = \sum_{n=1}^\infty \exp(\zeta_n(t)) d_n v_n$ სახით. ერთგვაროვანი არალოკალური საწყისი პირობიდან ვღებულობთ, რომ ვექტორი $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots) \in \tilde{I}_2$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან (2.8) სისტემას, რომლის ამონახსნის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს არალოკალური (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა. $\square$

უნდა აღინიშნოს, რომ არაკლასიკური (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემა მიიღება იმ შემთხვევაშიც, როცა $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$ არ წარმოადგენს კომპაქტურ ოპერატორს.

თეორემა 2.2. თუ $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$ ოპერატორი ისეთია, რომ $b_{jk} \equiv 0$, როცა $j < k$, $k = 2, 3, \dots$, და სრულდება პირობა

$$\left\| A_n \left(I - \hat{B}_n \left(\exp \left(-i A_n^2 \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \right) \right)^{-1} A_n^{-1} \right\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \beta, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

მაშინ ყოველი $u_0 \in V$, $f, f' \in L^2(0, T; V^*)$ -თვის, დროით არალოკალურ (2.3), (2.4) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და სამართლიანია (2.6) შეფასება.

დამტკიცება. თეორემის $b_{jk} \equiv 0$, როცა $j < k$, $k = 2, 3, \dots$, პირობიდან გამომდინარე (2.8) სისტემას გააჩნია სამკუთხა სტრუქტურა. აქედან გამომდინარე, ერთგვაროვან სისტემას ექნება მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი და ისევე როგორც თეორემა 2.1-ის დამტკიცებისას ვღებულობთ (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას. ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ ამონახსნის არსებობა. თეორემის პირობის ძალით ცხადად შეიძლება განისაზღვროს (2.8) უსასრულო სისტემის $\vec{d} \in \tilde{L}_2$ ამონახსნი. მართლაც, პირველი $n \in \mathbb{N}$ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $\vec{d}_n = (I - \hat{B}_n(\exp(\zeta_p(t))))^{-1} \vec{\psi}_n$, სადაც $\vec{d}_n = (d_k)_{k=1}^n$, $\vec{\psi}_n = (\psi_k)_{k=1}^n$, საიდანაც (2.9)-ის ძალით გვექნება

$$(A_n^2 \vec{d}_n, \vec{d}_n)_{\mathbb{C}^n} \leq c \left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 + \|f'\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ე.ი. $\vec{d} \in \tilde{L}_2$ და ამიტომ (2.7) მწკრივი თანაბრად კრებადი V სივრცეში და თეორემა 2.1-ის დამტკიცებისას გამოყენებული მსჯელობით მივიღებთ, რომ ვექტორ-ფუნქცია u წარმოადგენს (2.3), (2.4) არალოკალური ამოცანის ამონახსნს, ხოლო (2.6) შეფასება გამომდინარეობს უკანასკნელი უტოლობიდან. $\square$

2.3. აბსტრაქტული შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის არალოკალური ამოცანის აპროქსიმაცია კლასიკური ამოცანებით

შრედინგერის განტოლებისათვის არალოკალური (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნს არალოკალურ B ოპერატორზე სათანადო პირობებში შეიძლება მივუახლოვდეთ კლასიკური ამოცანების ამონახსნებით.

განვიხილოთ აბსტრაქტული შრედინგერის განტოლებისათვის კლასიკური ამოცანების შემდეგი მიმდევრობა: საძიებელია ვექტორ-ფუნქცია $w_n \in C^0([0, T]; V)$ ისეთი, რომ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w_n(\cdot), v)_H + i\alpha(\cdot)a(w_n(\cdot), v) &= \langle f(\cdot), v \rangle_*, \quad \forall v \in V, \\ w_n(0) &= Bw_{n-1} + u_0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

სადაც $w_0 \equiv 0$. ნებისმიერი $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$ ოპერატორისათვის და $u_0 \in V$ გვექნება $w_n(0) \in V$, ამიტომ თუ $f, f' \in L^2(0, T; V^*)$, მაშინ კლასიკურ (2.11) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი [24] ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის. მომდევნო თეორემაში მოყვანილია პირობები B ოპერატორზე, როდესაც (2.11) ამოცანების ამონახსნთა $(w_n)_{n=1}^\infty$ მიმდევრობა ახდენს არალოკალური (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნის აპროქსიმაციას.

თეორემა 2.3. ვთქვათ ოპერატორი $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$ აკმაყოფილებს პირობებს $b_{jk} \equiv 0$, როცა $j < k$, $k = 2, 3, \dots$, და არსებობს დადებითი მუდმივი $\gamma = \text{const} < 1$ ისეთი, რომ

$$\left\| A_n \hat{B}_n \left(\exp \left(-iA_n^2 \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \right) A_n^{-1} \right\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

თუ $u_0 \in V$, $f, f' \in L^2(0, T; V^*)$, მაშინ არალოკალურ (2.3), (2.4) გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი u და (2.11) ამოცანების ამონახსნთა $(w_n)_{n=1}^\infty$ მიმდევრობა მიისწრაფის u -კენ $C^0([0, T]; V)$ სივრცეში.

დამტკიცება. (2.12) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მატრიცა $I - \hat{B}_n(\exp(\zeta_n(t)))$ შებრუნებადია და

$$\left\| A_n (I - \hat{B}_n(\exp(\zeta_n(t))))^{-1} A_n^{-1} \right\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1-\gamma}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

საიდანაც, თეორემა 2.2-ის ძალით, მიიღება (2.3), (2.4) ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა.

ახლა ვაჩვენოთ $(w_n)_{n=1}^\infty$ მიმდევრობის კრებადობა არალოკალური ამოცანის ამონახსნისაკენ. განვიხილოთ $\Delta_n(t) = u(t) - w_n(t)$ და შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{d}{dt}(\Delta_n(\cdot), v)_H + i\alpha(\cdot)a(\Delta_n(\cdot), v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (2.13)$$

$$\Delta_n(0) = B\Delta_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (2.14)$$

(2.13), (2.14) ამოცანის ამონახსნი ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\Delta_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\zeta_n(t)) \delta_k^n v_k, \quad n \geq 0,$$

რომელიც თანაბრად კრებადია V სივრცეში. (2.14) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\delta_j^n = \sum_{k=1}^j b_{jk} \left(\exp(\zeta_n(t)) \right) \delta_k^{n-1}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1,$$

საიდანაც, (2.12)-ის ძალით, გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned} \|A_j \vec{\delta}_j^n\|_{\mathbb{C}^j} &= \|A_j \hat{B}_j(\exp(\zeta_j(t))) \vec{\delta}_j^{n-1}\|_{\mathbb{C}^j} = \|A_j \hat{B}_j^{n-1}(\exp(\zeta_n(t))) \vec{\delta}_j^1\|_{\mathbb{C}^j} \\ &\leq \gamma^{n-1} \|A_j \vec{\delta}_j^1\|_{\mathbb{C}^j} \leq \sqrt{c_a^*} \gamma^{n-1} \|Bu\|_V, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

სადაც $\vec{\delta}_j^n = (\delta_k^n)_{k=1}^j$. (2.15) უტოლობა საშუალებას იძლევა შევავსოთ $\Delta_n(t)$ -ს ნორმა

$$\|\Delta_n(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{c_a^*} a(\Delta_n(t), \Delta_n(t)) = \frac{1}{c_a^*} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\delta_j^n|^2 = \frac{1}{c_a^*} \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j \vec{\delta}_j^n\|_{\mathbb{C}^j}^2 \leq c \gamma^{2(n-1)},$$

სადაც $n \geq 1$, $c = \text{const} > 0$ არ არის დამოკიდებული n და t -ზე. მიღებული შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - w_n\|_{C^0([0,T];V)} = 0$. $\square$

ჩვენს მიერ განხილული იტერაციული (2.11) ალგორითმი საშუალებას იძლევა გამოვიკვლიოთ არალოკალური (2.3), (2.4) ამოცანა იმ შემთხვევაშიც, როცა A ოპერატორის სპექტრი არ აკმაყოფილებს თეორემა 2.1-2.3-ში მოთხოვნილ პირობებს და სრულდება მხოლოდ (2.1) პირობები. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.4. თუ $A \in \mathcal{L}(V; V^*)$ ოპერატორი აკმაყოფილებს (2.1) პირობებს, $\alpha \in C^1([0, T])$, $\alpha(t) \geq c_\alpha = \text{const} > 0$, ნებისმიერი $t \in [0, T]$, და $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$ ოპერატორის ნორმა შემოსაზღვრულია $\sqrt{c_a^*/c_a^*}$ მუდმივით, ე.ი. $\|B\|_L < \sqrt{c_a^*/c_a^*}$, მაშინ ნებისმიერი $u_0 \in V$, $f, f' \in L^2(0, T; V^*)$ -თვის დროით არალოკალურ (2.3), (2.4) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ ამონახსნის ერთადერთობა. ვთქვათ $\bar{u}(t)$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი (2.3) განტოლების ამონახსნს და აკმაყოფილებს ერთგვაროვან არალოკალურ (2.4) პირობას. ერთგვაროვანი (2.3) განტოლებისათვის ენერგეტიკულ ტოლობას აქვს შემდეგი სახე [24]:

$$\alpha(t) a(\bar{u}(t), \bar{u}(t)) = \alpha(0) a(\bar{u}(0), \bar{u}(0)) + \int_0^t \alpha'(\tau) a(\bar{u}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau, \quad \forall t \in [0, T],$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \alpha(t) a(\bar{u}(t), \bar{u}(t)) &= \alpha(0) a(\bar{u}(0), \bar{u}(0)) \exp \left(\int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \right) \\ &= \alpha(0) a(\bar{u}(0), \bar{u}(0)) \exp \left(\ln(\alpha(t)) - \ln(\alpha(0)) \right), \end{aligned}$$

ე.ი. $a(\bar{u}(t), \bar{u}(t)) = a(\bar{u}(0), \bar{u}(0))$, ყველა $t \in [0, T]$, და არალოკალური საწყისი (2.4) პირობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$c_a^* \|\bar{u}(t)\|_V^2 \leq a(\bar{u}(t), \bar{u}(t)) = a(B\bar{u}, B\bar{u}) \leq c_a^* \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \|\bar{u}\|_{C^0([0,T];V)}^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

საიდანაც, თეორემის პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ $\bar{u} \equiv 0$, ე.ი. (2.3), (2.4) ამოცანას შეიძლება გააჩნდეს არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

არალოკალური ამოცანის ამონახსნის არსებობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ (2.11) ამოცანათა მიმდევრობა, რომლებსაც ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის გააჩნიათ ერთადერთი ამონახსნი (2.1) თვისებების მქონე ნებისმიერი $A \in \mathcal{L}(V; V^*)$ ოპერატორისათვის, $\alpha \in C^1([0, T])$, $\alpha(t) \geq c_\alpha = \text{const} > 0$, ნებისმიერი $t \in [0, T]$, $B \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; V); V)$, $u_0 \in V$ და $f, f' \in L^2(0, T; V^*)$. შევნიშნოთ, რომ ვექტორ-ფუნქცია $\theta_n(t) = w_n(t) - w_{n-1}(t)$, $n \geq 1$, წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამონახსნს

$$\frac{d}{dt}(\theta_n(\cdot), v)_H + i\alpha(\cdot)a(\theta_n(\cdot), v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (2.16)$$

$$\theta_n(0) = B\theta_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (2.17)$$

ამონახსნის ერთადერთობისას დამტკიცების ანალოგიურად ენერგეტიკული ტოლობის გამოყენებით, (2.17) პირობიდან მივიღებთ

$$\|\theta_n(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{c_a^*} a(\theta_n(t), \theta_n(t)) = \frac{1}{c_a^*} a(B\theta_{n-1}, B\theta_{n-1}) \leq c_1 \left(\frac{c_a^*}{c_a} \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \right)^{n-1}.$$

ვიდაიდან $\|B\|_{\mathcal{L}} < \sqrt{c_a^*/c_a}$, ამიტომ $w_n(t) = \sum_{k=1}^n \theta_k(t)$ მიმდევრობა კრებადია $u(t)$ -კენ $C^0([0, T]; V)$ სივრცეში. აქედან გამომდინარე, (2.11)-ში ზღვარზე გადასვლით, როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ, რომ $u(t)$ წარმოადგენს (2.3), (2.4) არალოკალური ამოცანის ამონახსნს. $\square$

2.4. დროით არალოკალური ამოცანების გამოკვლევა შრედინგერის ტიპის

განტოლებებისა და სისტემებისათვის

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ წინა პარაგრაფებში აბსტრაქტულ შრედინგერის ტიპის განტოლებისათვის მიღებული შედეგების გამოყენებას შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის დროით არალოკალური ამოცანების გამოსაკვლევად.

ვთქვათ $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, წარმოადგენს შემოსაზღვრულ ლიპშიცის არეს Γ საზღვრით [25]. $H^r(\Omega)$ -თი აღვნიშნოთ კომპლექსური მნიშვნელობების მქონე ფუნქციათა r რიგის სობოლევის სივრცე $L^2(\Omega)$ მიმართ, რომელიც შედგება კვადრატში ჯამებადი ფუნქციებისაგან, რომელთა ყველა r რიგამდე განზოგადებული კერძო წარმოებულები

ეკუთვნის $L^2(\Omega)$ -ს. უსასრულოდ გლუვ Ω -ში კომპაქტური საყრდენის მქონე ფუნქციათა $\mathcal{D}(\Omega)$ სიმრავლის ჩაკეტვა $H^r(\Omega)$ -ში აღვნიშნოთ $H_0^r(\Omega)$ – თი, ხოლო $H^{-r}(\Omega)$ -ით კი შესაბამის ანტიშეუღლებული სივრცე. N -კომპონენტური ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathfrak{H}_0^r(\Omega) = (H_0^r(\Omega))^N$, $\mathfrak{H}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^N$, $\mathfrak{H}^{-r}(\Omega) = [H^{-r}(\Omega)]^N$.

განვიხილოთ მეორე რიგის ელიფსური ოპერატორი

$$A \equiv - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + A_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega,$$

სადაც $A_{ij}(\mathbf{x})$ წარმოადგენს N რიგის კვადრატულ მატრიცს კომპლექსური ელემენტებით, რომელიც გადადის შეუღლებულში ქვედა ინდექსების გადანაცვლებისას. ვიგულისხმობთ, რომ მატრიცის ელემენტები ეკუთვნიან $L^\infty(\Omega)$ და თითქმის ყველა $\mathbf{x} \in \Omega$ -თვის სრულდება უტოლობები

$$\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_{ij}(\mathbf{x}) \vec{b}_j, \vec{b}_i \right)_{\mathbb{C}^N} \geq c \sum_{i=1}^p \|\vec{b}_i\|_{\mathbb{C}^N}^2, \quad c = \text{const} > 0, \quad (A_0(\mathbf{x}) \vec{b}, \vec{b})_{\mathbb{C}^N} \geq 0, \quad (2.23)$$

სადაც $\vec{b}_i$ ($i = 1, \dots, p$), $\vec{b}$ ნებისმიერი N -კომპონენტური ვექტორებია კომპლექსური ელემენტებით.

შევნიშნოთ, რომ A ოპერატორის განმარტებაში კერძო წარმოებულების ქვეშ იგულისხმება განზოგადებული წარმოებულები შესაბამისი ცვლადების მიხედვით. შევნიშნოთ, რომ $L^2(\Omega)$ სივრცის j რიგის ($j = \overline{1, r}$) კერძო წარმოებული ეკუთვნის $H^{-j}(\Omega)$. რადგან $L^2(\Omega)$ -ს ფუნქციის გამრავლება $L^\infty(\Omega)$ -ს ფუნქციაზე ტოვებს მას იმავე სივრცეში, ამიტომ ნებისმიერი $v \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ ვექტორ-ფუნქციისათვის $Av \in \mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$ და A წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ოპერატორს $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ -დან $\mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$ -ში, რომელიც აკმაყოფილებს თვითშეუღლებულობის, და (2.23) თანახმად და პუანკარეს უტოლობის [26] ძალით V -კოერციტიულობის პირობებს:

$$\langle Av, w \rangle_* = \overline{\langle Aw, v \rangle_*}, \quad \langle Av, v \rangle_* \geq c \|v\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)}^2, \quad \forall v, w \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega), \quad (2.24)$$

სადაც $c = \text{const} > 0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ – ანტიშეუღლების მიმართებაა $\mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$ და $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ სივრცეებს შორის. ჰილბერტის სივრციდან მის შეუღლებულში თვითშეუღლებული V -კოერციტიული ოპერატორებისათვის ზოგადი თეორემის [25] გამოყენებით (2.24) პირობებიდან $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ სივრცის $L^2(\Omega)$ -ში უწყვეტი ჩადგმის კომპაქტურობის ძალით არსებობს $A: \mathfrak{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$ ოპერატორის საკუთრივ ფუნქციათა $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ სისტემა საკუთრივი მნიშვნელობებით

$\{|\lambda_n|^2\}_{n=1}^\infty$, რომელიც ორთონორმირებულია $L^2(\Omega)$ -ში, სრულია $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ -ში და $|\lambda_n|^2 \rightarrow \infty$, როცა $n \rightarrow \infty$.

განვიხილოთ დროით არალოკალური ამოცანა შრედინგერის ტიპის სისტემისათვის

$$\frac{\partial u}{\partial t} + i\alpha(t)Au = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.25)$$

არალოკალური საწყისი და ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^m \xi_j u(x, T_j) + \int_0^T \rho(\tau) u(x, \tau) d\tau + u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.26)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (2.27)$$

სადაც $\xi_j \neq 0$, $\xi_j \in \mathbb{C}$, $0 < T_j \leq T$, $1 \leq j \leq m$, $\alpha \in C^1([0, T])$, $\alpha(t) \geq c_\alpha = \text{const} > 0$, ნებისმიერი $t \in [0, T]$, $\rho \in L^1(0, T)$. $\Omega \times (0, T)$ -ზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციები გავაიგივოთ $(0, T)$ -ში მოცემულ ვექტორ-ფუნქციებთან მნიშვნელობებით Ω -ზე განსაზღვრულ შესაბამის ფუნქციონალურ სივცეებში. ამიტომ (2.25)-(2.27) ამოცანა შეიძლება ჩამოვყალიბოთ, როგორც $C^0([0, T]; \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$ სივრცის ისეთი u ვექტორ-ფუნქციის პოვნის ამოცანა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.25) განტოლებას $\mathfrak{H}^{-1}(\Omega)$ -ში მნიშვნელობების მქონე $(0, T)$ -ში განსაზღვრულ განაწილებათა $\mathcal{D}'((0, T); \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$ სივრცის აზრით, სადაც $\frac{\partial u}{\partial t}$ კერძო წარმოებულის ქვეშ იგულისხმება განზოგადებული წარმოებული $u' = \frac{du}{dt} \in \mathcal{D}'((0, T); \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$. u ვექტორ-ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს საწყისი (2.26) პირობა $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ სივრცეში, ხოლო სასაზღვრო (2.27) პირობის შესრულება უზრუნველყოფილია $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ სივრცის შერჩევით, რადგან $\mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ -ს ვექტორ-ფუნქციის კვალი Ω -ს საზღვარზე ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე, (2.25)-(2.27) არალოკალური ამოცანა წარმოადგენს (2.3), (2.4) არალოკალური ამოცანის კერძო შემთხვევას და თეორემა 2.2-ის გამოყენებით მიიღება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.5. თუ არსებობს დადებითი მუდმივი $\gamma = \text{const} > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის,

$$\left| 1 - \sum_{j=1}^m \xi_j \exp\left(-i|\lambda_n|^2 \int_0^{T_j} \alpha(s) ds\right) - \int_0^T \rho(\tau) \exp\left(-i|\lambda_n|^2 \int_0^\tau \alpha(s) ds\right) d\tau \right| > \gamma, \quad (2.28)$$

და $u_0 \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$, მაშინ დროით არალოკალურ (2.25)-(2.27) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in C^0([0, T]; \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$ და სამართლიანია შეფასება

$$\|u\|_{C^0([0,T];\mathfrak{H}_0^1(\Omega))} \leq c \left(\|u_0\|_{\mathfrak{H}_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;\mathfrak{H}^{-1}(\Omega))} + \|f'\|_{L^2(0,T;\mathfrak{H}^{-1}(\Omega))} \right). \quad (2.29)$$

ამასთან, (2.25)-(2.27) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ (2.28) პირობა შესრულდეს როცა $\gamma \geq 0$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ (2.25)-(2.27) ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი წარმოადგენს (2.25) სისტემისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს $u(0) = \tilde{u}_0 \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$ საწყისი და (2.27) სასაზღვრო პირობებით, სადაც $\tilde{u}_0$ (2.26) პირობის მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულების ტოლია. აღნიშნულ კლასიკურ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n, \quad u_n(t) = \exp(\zeta_n(t)) d_n + \eta_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

სადაც

$$\zeta_n(t) = -i|\lambda_n|^2 \int_0^t \alpha(s) ds, \quad \eta_n(t) = \int_0^t \exp(\zeta_n(t) - \zeta_n(\tau)) f_n(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$f_n(t) = \langle f(t), v_n \rangle_*$, ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის, $d_n = (\tilde{u}_0, v_n)_{\mathfrak{H}^2(\Omega)}$, $n \geq 1$. $\tilde{u}_0$ -ს ნაცვლად შესაბამისი გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ განტოლებას d_n -სთვის

$$d_n = \sum_{j=1}^m \xi_j \left(\exp(\zeta_n(T_j)) d_n + \eta_n(T_j) \right) + \int_0^T \rho(\tau) \left(\exp(\zeta_n(\tau)) d_n + \eta_n(\tau) \right) d\tau + u_{0n}, \quad (2.31)$$

$u_{0n} = (u_0, v_n)_{\mathfrak{H}^2(\Omega)}$, $n \in \mathbb{N}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ არალოკალურ ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\gamma \geq 0$.

(2.26) არალოკალური პირობის შემთხვევაში $I - \hat{B}_n \left(\exp \left(-iA_n^2 \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \right)$ მატრიცი არის დიაგონალური, რომელიც დიაგონალზე მდგომი ელემენტებია

$$1 - \sum_{j=1}^m \xi_j \exp(-i|\lambda_n|^2 T_j) - \int_0^T \rho(\tau) \exp(-i|\lambda_n|^2 \tau) d\tau$$

და ამიტომ იმ შემთხვევაში, როცა (2.28) პირობა სრულდება, როცა $\gamma > 0$, შესრულდება (2.10) პირობა. აქედან გამომდინარე, თეორემა 2.1-ის ძალით (2.25)-(2.27) არალოკალურ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. $\square$

დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით შეიძლება მივიღოთ საკმარისი პირობები α_j და ρ კოეფიციენტებზე, რომელთათვისაც (2.25)-(2.27) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. კერძოდ, თეორემა 2.5-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

შედეგი 2.1. თუ $u_0 \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$ და ξ_j ($j = 1, \dots, m$), ρ აკმაყოფილებენ პირობას

$$1 - \sum_{j=1}^m |\xi_j| > \int_0^T |\rho(\tau)| d\tau,$$

მაშინ არალოკალურ (2.25)-(2.27) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

იმისათვის, რომ გამოვიკვლიოთ შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის არალოკალური ამოცანების ზოგიერთი თავისებურება განვიხილოთ (2.25)-(2.27) ამოცანა, როცა $\rho \equiv 0$. შედეგი 2.1-ის თანახმად, თუ $\sum_{j=1}^m |\xi_j| < 1$, მაშინ არალოკალურ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. $\sum_{j=1}^m |\xi_j| = 1$ შემთხვევაში თეორემა 2.5-დან გამომდინარეობს, რომ (2.25)-(2.27) ამოცანას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\varphi_{\xi_j} \neq |\lambda_n|^2 \int_0^{T_j} \alpha(s) ds + 2\pi q, \quad \text{ერთი მაინც } j - \text{თვის, } j = 1, \dots, m, \quad \forall q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

სადაც φ_{ξ_j} აღნიშნულია ξ_j კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი. φ_{ξ_j} , T_j -ზე დამატებით პირობებში სამართლიანია ამონახსნის არსებობის შემდეგი თეორემა, რომელშიც Inty-ით აღვნიშნავთ y ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

თეორემა 2.6. ვთქვათ $\rho \equiv 0$, $\sum_{j=1}^m |\xi_j| = 1$ და ზოგიერთი $j \in J \subset \{1, \dots, m\}$ -თვის არსებობენ დადებითი მუდმივები $\hat{c}_j > 0$ და არაუარყოფითი მთელი რიცხვები $\hat{s}_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ისეთი, რომ

$$\left| \varphi_{\xi_j} - |\lambda_n|^2 \int_0^{T_j} \alpha(s) ds - 2\pi q \right| \geq \frac{\hat{c}_j}{|\lambda_n|^{\hat{s}_j}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (2.32)$$

თუ $u_0 \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega) \cap \mathfrak{H}^{\hat{s}+1}(\Omega)$, $f, f' \in L^2\left(0, T; \mathfrak{H}^{(\hat{s}-1)r}(\Omega)\right)$, $\hat{s} = \hat{s}_{j_0} \min\{2, m\}$, $\hat{s}_{j_0} = \min_{j \in J} \{\hat{s}_j\}$, და $Au_0, \dots, A^{\text{Int}(\frac{\hat{s}}{2})} u_0 \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$, $f, Af, \dots, A^{\text{Int}(\frac{\hat{s}}{2})-1} f, f', Af', \dots, A^{\text{Int}(\frac{\hat{s}}{2})-1} f' \in L^2(0, T; \mathfrak{H}_0^1(\Omega))$, როცა $\hat{s} \geq 2$, მაშინ დროით არალოკალურ (2.25)-(2.27) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და სამართლიანია შეფასება

$$\|u\|_{C^0([0, T]; \mathfrak{H}_0^1(\Omega))} \leq c \left(\|u_0\|_{\mathfrak{H}^{\hat{s}+1}(\Omega)} + \|f\|_{\mathfrak{H}^{\hat{s}-1}(\Omega)} + \|f'\|_{\mathfrak{H}^{\hat{s}-1}(\Omega)} \right). \quad (2.33)$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\left| 1 - \sum_{j=1}^m \xi_j \exp \left(-i |\lambda_n|^2 \int_0^{T_j} \alpha(s) ds \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^m |\xi_j| \left(1 - \exp(i \tilde{\varphi}_{\xi_j}) \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^m 2|\alpha_j| \sin\left(\frac{\tilde{\varphi}_{\xi_j}}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\tilde{\varphi}_{\xi_j}}{2}\right) - i \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_{\xi_j}}{2}\right) \right) \right| \geq 2 \max_{1 \leq j \leq m} |\xi_j| \left| \sin\left(\frac{\tilde{\varphi}_{\xi_j}}{2}\right) \right|^{\min\{2, m\}}, \quad (2.34)$$

$\tilde{\varphi}_{\xi_j} = \varphi_{\xi_j} - |\lambda_n|^2 \int_0^{T_j} \alpha(s) ds$, $j = 1, \dots, m$, საიდანაც, (2.32)-ის და თეორემა 2.5-ის ძალით ვღებულობთ, რომ (2.25) – (2.27) არალოკალური ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა. ამასთან, თუ $\hat{s}_{j_0} = 0$, მაშინ სრულდება (2.28) პირობა და ამიტომ დასამტკიცებელი დებულება გამომდინარეობს თეორემა 2.5-დან.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა როცა $\hat{s}_{j_0} \in \mathbb{N}$. არალოკალური ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ (2.30) მწკრივის სახით, სადაც d_n კოეფიციენტები განისაზღვრება (2.31) განტოლებებიდან. აღვნიშნოთ $\kappa(y) = \min\{2y\pi^{-1}, 2 - 2y\pi^{-1}\}$, $0 \leq y \leq \pi$. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$|\sin(t)| = |\sin(t - \pi \text{Int}(t\pi^{-1}))| \geq \kappa(t - \pi \text{Int}(t\pi^{-1})), \quad t \in \mathbb{R},$$

საიდანაც, (2.33)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ $\left| \sin\left(\frac{\varphi_{\xi_{j_0}} - |\lambda_n|^2 \int_0^{T_{j_0}} \alpha(s) ds}{2}\right) \right| \geq \frac{\epsilon_{j_0}}{\pi |\lambda_n|^{\hat{s}_{j_0}}}$,

ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$. აქედან გამომდინარე, d_n -თვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$|d_n| \leq c_1 |\lambda_n|^{\hat{s}} \left(\max_{1 \leq j \leq m} |\eta_n(T_j)| + |u_{0n}| \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

u_0 და f -ზე დამატებითი პირობების ძალით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |u_{0n}| &= \frac{1}{|\lambda_n|^2} |(Au_0, v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)}| = \dots = \frac{1}{|\lambda_n|^{\hat{s}+1}} \left| (A^{\frac{\hat{s}+1}{2}} u_0, v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} \right|, \\ |\eta_n(T_j)| &= \frac{1}{|\lambda_n|^{\hat{s}-1}} \left| \int_0^{T_j} \exp\left(i|\lambda_n|^2 \int_0^\tau \alpha(s) ds\right) \left(A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f(\tau), v_n \right)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_n|^{\hat{s}+1}} \left(\frac{\left| (A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f(T_j), v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} \right|}{\alpha(T_j)} + \frac{\left| (A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f(0), v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} \right|}{\alpha(0)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T_j} \frac{\left| (A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f'(\tau), v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} \right|}{\alpha(\tau)} d\tau + \int_0^{T_j} \frac{\left| (A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f'(\tau), v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} \right| |\alpha'(\tau)|}{\alpha^2(\tau)} d\tau \right), \end{aligned}$$

როცა $\hat{s} \in \mathbb{N}$ კენტია;

$$|u_{0n}| = \frac{1}{|\lambda_n|^2} |(Au_0, v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)}| = \dots = \frac{1}{|\lambda_n|^{\hat{s}}} \left| (A^{\frac{\hat{s}}{2}} u_0, v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} \right|,$$

$$\begin{aligned}
|\eta_n(T_j)| &= \frac{1}{|\lambda_n|^2} \left| \int_0^{T_j} \exp \left(i |\lambda_n|^2 \int_0^\tau \alpha(s) ds \right) (Af(\tau), v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)} d\tau \right| = \dots \\
&= \frac{1}{|\lambda_n|^{\hat{s}}} \left| \int_0^{T_j} \exp \left(i |\lambda_n|^2 \int_0^\tau \alpha(s) ds \right) \langle A^{\frac{\hat{s}}{2}} f(\tau), v_n \rangle_* d\tau \right|,
\end{aligned}$$

როცა $\hat{s} \in \mathbb{N}$ ლუწია. ვინაიდან ნებისმიერი w ვექტორ-ფუნქციისათვის $\mathbb{R}^2(\Omega)$ -დან, $\sum_{n=1}^{\infty} |(w, v_n)_{\mathbb{R}^2(\Omega)}|^2 = \|w\|_{L^2(\Omega)}^2$, ამიტომ კენტი $\hat{s} \in \mathbb{N}$ -თვის,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |d_n|^2 &\leq c_2 \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2(\hat{s}+1)} \left(\max_{1 \leq j \leq m} |\eta_n(T_j)|^2 + |u_{0n}|^2 \right) \\
&\leq c_3 \left(\left\| A^{\frac{\hat{s}+1}{2}} u_0 \right\|_{\mathbb{R}^2(\Omega)}^2 + \max_{t \in [0, T]} \left\| A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f(t) \right\|_{\mathbb{R}^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \left\| A^{\frac{\hat{s}-1}{2}} f'(\tau) \right\|_{\mathbb{R}^2(\Omega)}^2 d\tau \right), \quad (2.35)
\end{aligned}$$

ხოლო ლუწი $\hat{s} \in \mathbb{N}$ -თვის თეორემის პირობის თანახმად $A^{\frac{\hat{s}}{2}} u_0 \in \mathfrak{H}_0^1(\Omega)$, $A^{\frac{\hat{s}}{2}} f, A^{\frac{\hat{s}}{2}} f' \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))$ და აქედან გამომდინარე

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |d_n|^2 \leq c_4 \left(\left\| A^{\frac{\hat{s}}{2}} u_0 \right\|_{\mathfrak{H}_0^1(\Omega)}^2 + \left\| A^{\frac{\hat{s}}{2}} f \right\|_{L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))}^2 + \left\| A^{\frac{\hat{s}}{2}} f' \right\|_{L^2(0, T; \mathfrak{H}^{-1}(\Omega))}^2 \right). \quad (2.36)$$

ჩადგმის თეორემის თანახმად $f, f' \in L^2(0, T; \mathfrak{H}^{\hat{s}-1}(\Omega))$ -დან გვექნება, რომ $f \in C^0([0, T]; \mathfrak{H}^{\hat{s}-1}(\Omega))$, ამიტომ (2.35), (2.36) შეფასებებიდან გამომდინარეობს (2.30) მწკრივის თანაბრად კრებადობა, (2.33) შეფასების სამართლიანობა და თეორემა 2.5-ის მსჯელობის გამეორებით მივიღებთ, რომ u წარმოადგენს არალოკალური ამოცანის ამონახსნს. $\square$

განვიხილოთ (2.25)-(2.27) ამოცანა, როცა Ω წარმოადგენს ერთგანზომილებიან არეს

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\alpha(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (2.37)$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო და არალოკალური საწყისი პირობებით

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.38)$$

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^m \xi_j u(x, T_j) + u_0(x), \quad x \in (0, l), \quad (2.39)$$

სადაც $\xi_j \neq 0$ – მოცემული კომპლექსური რიცხვებია, $0 < T_j \leq T$ ($j = 1, \dots, m$), $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ – მოცემული ფუნქციებია, u – საძიებელი ფუნქციაა $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ სივრციდან. თუ $\sum_{j=1}^m |\xi_j| < 1$, მაშინ არალოკალურ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო ნამდვილი $\{\xi_j\}_{j=1}^m$ -თვის, როცა $\sum_{j=1}^m |\xi_j| = 1$, ამოცანას ექნება არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთი მაინც $\{T_j\}_{j=1}^m$ წერტილისათვის

$$\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_j} \alpha(s) ds \neq \frac{q}{k}, \text{ როცა } \xi_j > 0, \quad \frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_j} \alpha(s) ds \neq \frac{2q-1}{n^2}, \text{ როცა } \xi_j < 0,$$

ნებისმიერი $k, n, q \in \mathbb{N}$. შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი პირობის შესრულება არ არის საკმარისი არალოკალური ამოცანის ამონახსნის არსებობისათვის მოცემული u_0 და f ფუნქციების ანალიზურობის შემთხვევაშიც. მართლაც, ვთქვათ $m = 1$, $\xi_1 = 1$ და $f \equiv 0$. არალოკალური (2.37)-(2.39) ამოცანის ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს (2.30) მწკრივის სახით, სადაც

$$d_n = u_{0n} \left(1 - \exp \left(-i|\lambda_n|^2 \int_0^{T_1} \alpha(s) ds \right) \right)^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ვიდაიდან ყოველი t -თვის მწკრივი (2.30) კრებადია $H_0^1(\Omega)$ სივრცეში, ამიტომ

$$\pi n |u_{0n}| \left| \sin \left(\frac{\pi^2 n^2}{2l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds \right) \right|^{-1} \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

ვთქვათ u_0 წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას, რომელსაც აქვს სახე

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$$

და ნამდვილი რიცხვი $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ უდრის $2 \sum_{j=1}^{\infty} (n_j)^{-2}$, სადაც $n_j = 2^{n_{j-1}}$, $n_0 = 1$, $j \in \mathbb{N}$.

შევნიშნოთ, რომ $u_{0n} = \int_0^l u_0(x) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) dx = \frac{l}{2^{n+1}}$ და ნებისმიერი $q \in \mathbb{N}$ -თვის,

$$\left| \sin \left(\frac{\pi^2 n_q^2}{2l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds \right) \right| = \left| \sin \left(\pi n_q^2 \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{n_j^2} \right) \right| < \pi n_q^2 \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{n_j^2} < \frac{2\pi n_q^2}{n_{q+1}^2}.$$

აქედან გამომდინარე,

$$\pi n_q |u_{0n_q}| \left| \sin \left(\frac{\pi^2 n_q^2}{2l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds \right) \right|^{-1} > \frac{2^{n_q-2} l}{n_q} \rightarrow \infty, \text{ როცა } q \rightarrow \infty,$$

და ამიტომ აღნიშნული $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ -თვის (2.37)-(2.39) ამოცანას არ გააჩნია ამონახსნი $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ სივრცეში.

იმისათვის, რომ დროით არალოკალური ამოცანა იყოს ამოხსნადი აუცილებელია $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ რიცხვის რაციონალური რიცხვებით აპროქსიმაციის რიგზე გარკვეული შეზღუდვების მოთხოვნა. თეორემა 2.6-დან, როცა $\xi = 0, 1$, მიიღება (2.37)-(2.39) ამოცანის ამოხსნადობის პირობები.

თეორემა 2.7. თუ $m = 1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $|\xi_1| = 1$ და არსებობს დადებითი მუდმივი $c > 0$ ისეთი, რომ

$$\left| \frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds - \frac{q}{n} \right| \geq \frac{c}{n^2}, \quad \forall n, q \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

მაშინ ყოველი $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ არაკლასიკურ ამოცანას შრედინგერის განტოლებისათვის არალოკალური საწყისი (2.40) და ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

თეორემა 2.8. თუ $m = 1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $|\xi_1| = 1$ და რომელიმე $0 < \varepsilon < 1$ არსებობს დადებითი მუდმივი $c(\varepsilon) > 0$ ისეთი, რომ

$$\left| \frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds - \frac{q}{n} \right| \geq \frac{c(\varepsilon)}{n^{2+\varepsilon}}, \quad \forall n, q \in \mathbb{N}, \quad (2.41)$$

მაშინ ყოველი $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ დროით არალოკალურ (2.37)-(2.39) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.40) პირობას მოიცავს ყველა მეორე ხარისხის ირაციონალურ ალგებრულ რიცხვს, ხოლო ირაციონალური რიცხვების რაციონალურებით მიახლოების შესახებ ლიუვილის თეორემის განზოგადების თანახმად [28], ნებისმიერი ალგებრული $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ რიცხვი აკმაყოფილებს (2.41) უტოლობას.

ანალოგიური შედეგები სამართლიანია მრავალგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლების შემთხვევაშიც

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.42)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.43)$$

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^m \xi_j u(x, T_j) + u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.44)$$

სადაც $\Omega = (0, l_1) \times \dots \times (0, l_p)$, $\alpha \in C^1([0, T])$, $\alpha(t) \geq c_\alpha = \text{const} > 0$, ნებისმიერი $t \in [0, T]$, $\xi_j \neq 0$ – მოცემული კომპლექსური რიცხვებია, $0 < T_j \leq T$ ($j = 1, \dots, m$), $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ – მოცემული ფუნქციებია, ხოლო u – საძიებელი ფუნქციაა $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ სივრციდან. შედეგი 2.1-ის თანახმად (2.42)-(2.44) ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია, თუ $\sum_{j=1}^m |\xi_j| < 1$. ნამდვილი $\{\xi_j\}_{j=1}^m$ -ის შემთხვევაში, როცა

$\sum_{j=1}^m |\xi_j| = 1$, არალოკალურ ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა, თუ რომელიმე T_j -თვის,

$$\pi \left(\left(\frac{n_1}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n_p}{l_p} \right)^2 \right) \int_0^{T_j} \alpha(s) ds$$

არ წარმოადგენს მთელ რიცხვს ნებისმიერი $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $m = 1$, $|\xi_1| = 1$, $l_1 = \dots = l_p = l$, თეორემა 2.6-დან, როცა $\hat{s} = 2, 3$, მივიღებთ არსებობის შედეგებს $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ რიცხვის ალგებრული თვისებების გათვალისწინებით.

თეორემა 2.9. თუ $m = 1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $|\xi_1| = 1$, $l_j = l$, $j = 1, \dots, p$, $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ რიცხვი აკმაყოფილებს (2.40) პირობას და $u_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\sum_{j=1}^p \partial^2 u_0 / \partial x_j^2 \in H_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, მაშინ დროით არალოკალურ (2.42)-(2.44) ამოცანას მრავალგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლებისათვის გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

თეორემა 2.10. თუ $m = 1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $|\xi_1| = 1$, $l_j = l$, $j = 1, \dots, p$, $\frac{\pi}{l^2} \int_0^{T_1} \alpha(s) ds$ რიცხვი აკმაყოფილებს (2.41) პირობას და $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\sum_{j=1}^p \partial^2 u_0 / \partial x_j^2 \in H_0^1(\Omega)$, $f, f' \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, მაშინ არაკლასიკურ ამოცანას მრავალგანზომილებიანი შრედინგერის (2.42) განტოლებისათვის ერთგვაროვანი სასაზღვრო (2.43) და არალოკალური საწყისი (2.44) პირობებით გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

დასკვნა

ნაშრომში განხილულია არალოკალური ამოცანები პირველი რიგის ევოლუციური და შრედინგერის ტიპის განტოლებებისათვის დროზე დამოკიდებული V -კორეკტიული ოპერატორებით აბსტრაქტულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეებში მნიშვნელობებით ჰილბერტის სივრცეებში. დამტკიცებულია არალოკალური ამოცანების ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები, როდესაც საწყისი პირობის განმსაზღვრელი არალოკალური ოპერატორი კომპაქტურია და არ არის კომპაქტური. აგებულია არალოკალური ამოცანის კლასიკური ამოცანებით აპროქსიმაციის ალგორითმი და დამტკიცებულია კლასიკური ამოცანების ამონახსნების მიმდევრობის კრებადობა არალოკალური ამოცანების ამონახსნებისაკენ სათანადო სივრცეებში. განხილულია მიღებული აბსტრაქტული შედეგების გამოყენება დროით არალოკალური საწყის-სასაზღვრო ამოცანებისათვის პარაბოლური და შრედინგერის ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის დროით ცვლადზე დამოკიდებული ელიფსური ოპერატორით და დისკრეტულ-ინტეგრალური არალოკალური საწყისი პირობით.

ლიტერატურა

1. J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to specification of energy, *Quart. Appl. Math.* **21** (1963), 2, 155-160.
2. Y.S. Choi, K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **18** (1992), 4, 317-331.
3. D.J. Ildefonso, J.-M. Rakotoson, On a nonlocal stationary free-boundary problem arising in the confinement of a plasma in a stellarator geometry, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **134** (1996), 1, 53-95.
4. Bouziani, Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equations, *Hiroshima Math. J.* **27** (1997), 3, 373-390.
5. S. Mesloub, S.A. Messaoudi, A nonlocal mixed semilinear problem for second-order hyperbolic equations, *Electr. J. Diff. Eq.* **2003** (2003), 30, 1-17.
6. M. Dehghan, On the solution of an initial-boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation, *Numer. Meth. Partial Diff. Eq.* **21**(2005), 1, 24-40.
7. A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii, On some simplest generalizations of linear elliptic problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **185** (1969), 739-740 (in Russian).
8. D. G. Gordeziani, On a method of resolution of Bitsadze-Samarskii boundary value problem, *Rep. of Sem. of Inst. Appl. Math. Tbilisi State Univ.* **2** (1970), 38-40 (in Russian).
9. D. G. Gordeziani, T. Z. Djioev, On solvability of a boundary value problem for a nonlinear elliptic equation, *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR* **68** (1972), 289-292 (in Russian).
10. M. P. Sapagovas, R. I. Chegiz, On some boundary value problems with nonlocal conditions, *Diff. Equat.* **23** (1987), 1268-1274 (in Russian).
11. D. Gordeziani, N. Gordeziani, G. Avalishvili, Nonlocal boundary value problems for some partial differential equations, *Bull. Georgian Acad. Sci.* **157** (1998), 3, 365-368.
12. G. Avalishvili, D. Gordeziani, On one class of spatial nonlocal problems for some hyperbolic equations, *Georgian Math. J.* **7** (2000), 3, 417-425.
13. D. G. Gordeziani, T. Davitashvili, Z. Khvedelidze, On one mathematical model of the Georgian transport corridor contamination, *Bull. Georg. Acad. Sci.* **162** (2000), 1, 45-48.
14. D. G. Gordeziani, On some initial conditions for parabolic equations, *Rep. of Enlarged Sess. of the Sem. of I. Vekua Inst. Appl. Math.* **4** (1989), 57-60.
15. V. V. Shelukhin, A non-local in time model for radionuclides propagation in Stokes fluids, *Dinamika Sploshn. Sredy* **107** (1993), 180-193.

16. D. G. Gordeziani, On solution of in time nonlocal problems for some equations of mathematical physics, ICM-94, Abstracts, Short Communications, 1994, 240.
17. C. V. Pao, Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions, J. Math. Anal. Appl. **195** (1995), 3, 702-718.
18. R. E. Ewing, R. D. Lazarov, Y. Lin, Finite volume element approximations of nonlocal in time one-dimensional flows in porous media, Computing **64** (2000), 157-182.
19. D. Gordeziani, M. Avalishvili, G. Avalishvili, On the investigation of one nonclassical problem for Navier-Stokes equations, Appl. Math. Inform. **7** (2002), 2, 66-77.
20. D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, Time-nonlocal problems for Schrödinger type equations: I. Problems in abstract spaces, Diff. Eq. **41** (2005), 5, 703-711.
21. D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, Time-nonlocal problems for Schrödinger type equations: II. Results for specific problems, Diff. Eq. **41** (2005), 6, 852-859.
22. G. Avalishvili, M. Avalishvili, On nonclassical problems for first-order evolution equations, Georgian Math. J. **18** (2011), 441-463.
23. G. Avalishvili, M. Avalishvili, B. Miara, Nonclassical problems with nonlocal initial conditions for second-order evolution equations, Asymptotic Analysis **76** (2012), 171-192.
24. R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 8, Evolution: semi-groupe, variationnel. Masson, Paris, 1988.
25. W. McLean, Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
26. P. G. Ciarlet, Linear and nonlinear functional analysis with applications. SIAM, Philadelphia, 2013.
27. L. Schwartz, Analyse mathématique. vol. 1, Hermann, Paris, 1967.
28. K.F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika **2** (1955), 1-20.