



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისი სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ნინო ბურჯანაძე

ერთი კლასის ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანის ამონახსნის
არსებობის შესახებ

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე , ფიზიკა–მათემატიკურ
მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თბილისი 2020

ს ა რ ო ე ვ ი

ანოტაცია (ქართულ ენაზე)	3
ანოტაცია (ინგლისურ ენაზე)	4
შესავალი	5
\$ 1. ამოცანის დასმა. ძირითადი შედეგების ფორმულირება	9
\$ 2. დამხმარე დებულებები	13
\$ 3. თეორემა 1.1 დამტკიცება	26
\$ 4 . თეორემა 1.2-1.4 დამტკიცება	35
დასკვნა	38
ლიტერატურა	39

ანოტაცია

კვაზიწრფივი ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანისთვის მუდმივი დაგვიანების პარამეტრებით, ფაზური შეზღუდვით და სასაზღვრო პირობით, ზოგადი ფუნქციონალით დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობის თეორემა. ამონახსნის ქვეშ იგულისხმება დაგვიანების პარამეტრებისა და მართვის ერთობლიობა. მიღებული შედეგი დაკონკრეტებულია მართვის მიმართ წრფივი და არსებითად წრფივი ამოცანებისთვის, აგრეთვე ოპტიმალური ამოცანისთვის ინტეგრალური ფუნქციონალით.

Summary

The existence theorem is proved for the quasi-linear optimal problem with the constant delay parameters, with the phase restriction and boundary condition, with the general functional. Under solution we imply the collection of delay parameters and control. The result obtained here is concretized for the linear with respect to control and essentially-linear problems, for the optimal problem with the integral functional also.

შესავალი

ნეიტრალური სამართი დიფერენციალური განტოლება არის ისეთი სამართი დინამიური სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომლის ყოფაქცევა დროის მოცემულ მომენტში დამოკიდებულია სისტემის მდგომარეობისა და მისი სიჩქარის (ტრაექტორიის წარმოებულის) წინასტორიაზე. ასეთი მათემატიკური მოდელები წარმოიშობა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სხვადასხვა დარგებში, ეკონომიკაში და ა. შ. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ეკონომიკური ზრდის უმარტივესი მოდელი. ვთქვათ t მომენტში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის ღირებულება გამოსახული ფულად ერთეულში არის $N(t)$. ეკონომიკური ზრდის ფუნდამენტურ პრინციპს აქვს სახე

$$N(t) = C(t) + I(t), \quad (1)$$

სადაც $C(t)$ არის მოხმარების ფუნქცია (თანხა ხელფასებისთვის, სოციალური პროგრამებისთვის და სხვა), $I(t)$ არის ინდუცირებული ინვესტიცია (თანხა ახალი დანადგარებისა და ტექნოლოგიების შესაძენად და სხვა). განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$C(t) = u_1(t)N(t) \quad (2)$$

$$I(t) = u_2(t)N(t - \tau) + u_3(t)\dot{N}(t) + u_4(t)\dot{N}(t - \tau) + \alpha_1\ddot{N}(t) + \alpha_2\ddot{N}(t - \sigma), \quad (3)$$

სადაც $u_i(t) \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2]$, $i = 1, 2, 3, 4$ არის მართვის ფუნქციები; $0 < \hat{u}_1 < \hat{u}_2 < 1$, $\alpha_1 > 0$ და

$\alpha_2 > 0$ მოცემული რიხვებია; $\tau > 0$ და $\sigma > 0$ არის დაგვიანების პარამეტრები. (3)

ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ინვესტიციის მოცულობა t მომენტში დამოკიდებულია:

თანხის რაოდენობაზე $t - \tau$ მომენტში (წარსულში); სიჩქარეზე (პროდუქციის ნაკადზე) t

და $t - \tau$ მომენტებში, აჩქარებაზე t და $t - \sigma$ მომენტებში. (1)-(3)-დან მივიღებთ

განტოლებას

$$\ddot{N}(t) = \frac{1-u_1(t)}{\alpha_1} N(t) - \frac{u_2(t)}{\alpha_1} N(t-\tau) - \frac{u_3(t)}{\alpha_1} \dot{N}(t)$$

$$- \frac{u_4(t)}{\alpha_1} \dot{N}(t-\tau) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \dot{N}(t-\sigma)$$

რომელიც ექვივალენტულია შემდეგი ნეიტრალური დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1-u_1(t)}{\alpha_1} x_1(t) - \frac{u_2(t)}{\alpha_1} x_1(t-\tau) - \frac{u_3(t)}{\alpha_1} x_2(t), \\ - \frac{u_4(t)}{\alpha_1} x_2(t-\tau) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \dot{x}_2(t-\sigma), \end{cases} \quad (4)$$

აქ $x_1(t) = N(t)$.

ვთქვათ $0 < d_0 < d_1$ და $0 < h_0 < h_1$ მოცემული რიცხვებია, ხოლო $[0, \theta]$ მოცემული ინტერვალია. ყოველ ელემენტს $w = (\tau, \sigma, u_1(\cdot), \dots, u_4(\cdot))$, სადაც $\tau \in [d_0, d_1]$, $\sigma \in [h_0, h_1]$, ხოლო $u_i(t) \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2]$, $t \in [0, \theta]$, $i = 1, 2, 3, 4$ ზომადი მართვის ფუნქციებია, შევუსაბამოთ (4) განტოლება საწყისი პირობით

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = \varphi_2(t), \quad t \in [\hat{\sigma}, 0], \quad \dot{x}_2(t) = \dot{\varphi}_2(t), \quad t \in [\hat{\sigma}, 0] \quad (5)$$

და ფაზური შეზღუდვით

$$x_1(t) \geq 0, t \in [0, \theta], \quad (6)$$

სადაც $\varphi_1(t) \geq 0$ და $\varphi_2(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, ხოლო $\hat{\sigma} = -\max\{d_1, h_1\}$.

(4)-(5) ამოცანის ან w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი აღვნიშნოთ $(x_1(t; w), x_2(t; w))$.

ეკონომიკური ზრდის ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანა. ვიპოვოთ ისეთი ელემენტი

$w_0 = (\tau_0, \sigma_0, u_{10}(\cdot), \dots, u_{40}(\cdot))$ რომ შესაბამისი ამონახსნი $(x_1(t; w_0), x_2(t; w_0))$

აკმაყოფილებდეს (6) პირობას და ფუნქციონალს

$$x_2(\theta; w) \rightarrow \min \quad (7)$$

ანიჭებდეს მინიმალურ მნიშვნელობას. (4)-(7) ამოცანას ეწოდება ეკონომიკური ზრდის ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანა.

ნაშრომში, განხილულია ოპტიმალური ამოცანა კვაზიწრფივი ნეიტრალური (სიჩქარის წინაისტორიის მიმართ წრფივი) სამართი სისტემისთვის. ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევას ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების თვალსაზრისით მრავალი ნაშრომი მიემდვნა, მათ შორის [1-5]. სამაგისტრო ნაშრომში, ამონახსნის არსებობის თვალსაზრისით, განხილულია ოპტიმალური ამოცანა რომელიც შედგება შემდეგი კომპონენტებისგან:

1) კვაზიწრფივი სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}(t) = A(t)\dot{x}(t - \sigma) + f(t, x(t), x(t - \tau), u(t)), t \in [t_0, t_1] \subset (a, b),$$

სადაც $\tau \in [d_0, d_1]$, $\sigma \in [h_0, h_1]$, $u(\cdot) \in \Omega$.

2) საწყისი პირობა განტოლებისთვის

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0], \dot{x}(t) = \varsigma(t), t \in [\hat{\tau}, t_0],$$

სადაც $\varphi: [\hat{\tau}, b] \rightarrow O$ არის უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო $\varsigma: [\hat{\tau}, b] \rightarrow R_x^n$ - ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქცია, $\hat{\tau} = a - \max\{d_1, h_1\}$. აქ და შემდგომში ყოველთვის იგულისხმება, რომ სიმბოლო $\dot{x}(t)$ ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_0]$ არ არის დაკავშირებული $\varphi(t)$ ფუნქციის წარმოებულთან.

3) ფაზური შეზღუდვები

$$\rho(t, x(t)) \geq 0, t \in [t_0, t_1],$$

სადაც $\rho(t, x) = (\rho^1(t, x), \dots, \rho^l(t, x))$, $\rho \geq 0$ ვექტორული უტოლობის ქვეშ იგულისხმება, რომ $\rho^i \geq 0$, $i = \overline{1, l}$;

4) პირობა ტრაექტორიის ბოლოზე

$$\Phi(x(t_1)) = 0;$$

5) ფუნქციონალი

$$\zeta(w) = \zeta(\tau, \sigma, x(t_1)) \rightarrow \min,$$

რომლის მინიმიზაცია ხდება დასაშვებ $w = (\tau, \sigma, u(\cdot))$ ელემენტების მიმართ $W = [d_1, d_2] \times [h_1, h_2] \times \Omega$ კლასიდან. w ელემენტს ეწოდება დასაშვები თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი აკმაყოფილებს 3)-4) პირობას.

კვაზიწრფივი ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანა: W კლასში ვიპოვოთ ისეთი $w_0 \in W$ ელემენტი, რომლის შესაბამისი ამონახსნი აკმაყოფილებს 3)-4) შეზღუდვებს და 5) ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $w_0 \in W$ ეწოდება ამოცანის ამონახსნი (ოპტიმალური ელემენტი). ამრიგად, ამოცანის ამონახსნის მოძებნა გულისხმობს τ და σ დაგვიანების პარამეტრების, და $u(t)$ მართის ოპტიმალურად არჩევას. 1)- 5) ამოცანას ეწოდება კვაზიწრფივი ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანა. ნაშრომში, [7]-ში გადმოცემული მეთოდით, დამტკიცებულია 1)-5) ამოცანის ამონახსნის არსებობა ელემენტთა W კლასში (თეორმა 1.1, ძირითადი შედეგი), სადაც Ω არის ზომად $u(t)$ ფუნქციების სიმრავლე მნიშვნელობებით $U \subset R^r$ კომპაქტური სიმრავლიდან. გარდა ამისა, ძირითადი შედეგი დაკონკრეტებულია მართვის მიმართ წრფივი და არსებითად წრფივი ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანისთვის (თეორემა 1.2 და 1.3), აგრეთვე ამოცანისთვის ინტეგრალური ფუნქციონალით (თეორემა 1.4). [6] -ში და [7]-ში ამონახსნების არსებობის საკითხი გამოკვლეულია ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანებისთვის ფიქსირებული და არაფიქსირებული დაგვიანების პარამეტრების შემთხვევაში. [7]-გან განსხვავებით, ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება რომ აქ ტრაექტორია აკაყოფილებს ფუნქციონალურ ფაზურ შეზღუდვას.

ნაშრომის პირველ პარაგრაფში დასმულია ოპტიმალური ამოცანა და მოყვანილია ძირითადი შედეგები ოთხი თეორემის სახით. მე-2 პარაგრაფი ეხება დამხმარე დებულებებს, რომლებიც არსებითად გამოიყენება თეორემების დასამტკიცებლად. სახელდობრ, აქ დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის გაგრძელებადობის შესახებ. მე-3 პარაგრაფში, დამტკიცებულია თეორემა 1.1. მე-4 პარაგრაფში, ამონახსნის არსებობის თეორემები დამტკიცებულია მართვის მიმართ წრფივი და არსებითად წრფივი ამოცანებისთვის და ამოცანისთვის ინტეგრალური ფუნქციონალით. ნაშრომის ბოლოში მოცემულია დასკვნა და ლიტერატურის ნუსხა. ნაშრომში მიღებული შედეგები, თეზისის სახით გამოქვეყნებულია თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXIV საერთაშორისო გაფართოებული სხდომების თეზისების ელექტრონულ კრებულში [8]

§ 1. ამოცანის დასმა. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ $a < t_0 < t_1 < b, 0 < d_0 < d_1$ და $0 < h_0 < h_1$ მოცემული რიცხვებია, ისეთი რომ შესრულებულია პირობები $t_0 + d_1 < t_1, t_0 + h_1 < t_1$. R_x^n -ით აღვნიშნოთ $x = (x^1, \dots, x^n)^T$ ვექტორთა (წერტილთა) n -განზომილებიანი სივრცე ნორმით

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2,$$

სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას. ვიგულისხმობთ, რომ $O \subset R_x^n$ არის ღია სიმრავლე, ხოლო $U \subset R_u^r$ - კომპაქტური სიმრავლე. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t, x_1, x_2, u) = (f^1(t, x_1, x_2, u), \dots, f^n(t, x_1, x_2, u))^T,$$

რომელიც უწყვეტია $I \times O^2 \times U$ სიმრავლეზე, სადაც $I = [a, b]$, და უწყვეტად წარმოებადია $x_1, x_2 \in O$ ცვლადების მიმართ. Ω -თი აღვნიშნოთ ზომად $u(t) \in U, t \in I$ ფუნქციების სიმრავლე.

ყოველ $w = (\tau, \sigma, u(\cdot)) \in W = [d_0, d_1] \times [h_0, h_1] \times \Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ კვაზიწრფივი (წარმოებულის წინა ისტორიის მიმართ წრფივი) ნეიტრალური დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = A(t)\dot{x}(t - \sigma) + f(t, x(t), x(t - \tau), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.1)$$

საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\hat{\tau}, t_0], \quad \dot{x}(t) = \varsigma(t), \quad t \in [\hat{\tau}, t_0) \quad (1.2)$$

სადაც $A(t), t \in I$ არის $n \times n$ განზომილებიან უწყვეტი მატრიც-ფუნქცია, $\hat{\tau} = a - \max\{d_1, h_1\}$; $\varphi: [\hat{\tau}, b] \rightarrow O$ არის უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო $\varsigma: [\hat{\tau}, b] \rightarrow R_x^n$ - ზომადი

შემოსაზღვრული ფუნქცია. აქ და შემდგომში ყოველთვის იგულისხმება, რომ სიმბოლო $\dot{x}(t)$ ინტერვალზე $[\tau, t_0]$ არ არის დაკავშირებული $\rho(t)$ ფუნქციის წარმოებულთან.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $w = (\tau, \sigma, u(\cdot)) \in W$ ფიქსირებული ელემენტია. ფუნქციას $x(t) = x(t; w) \in O$, $t \in [\tau, t_1]$ ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი (1.2) საწყისი პირობით ან w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი $[\tau, t_0]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (1.2) საწყის პირობას, ხოლო $[t_0, t_1]$ ინტერვალზე $x(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტია და ამავე ინტერვალზე თითქმის ყველგან (თ. ყ.) აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას.

განსაზღვრება 1.2. $w \in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ არსებობს შესაბამისი ამონახსნი $x(t) = x(t; w)$, $t \in [\tau, t_1]$, რომლისთვის შესრულებულია პირობები: შეზღუდვა ფაზურ კოორდინატებზე

$$\rho(t, x(t)) \geq 0, t \in [t_0, t_1]; \quad (1.3)$$

პირობა ტრაექტორიის ბოლოზე

$$\Phi(x(t_1)) = 0.$$

აქ $\rho(t, x) = (\rho^1(t, x), \dots, \rho^l(t, x))$ ვექტორ-ფუნქცია უწყვეტია $[t_0, t_1] \times O$ -ზე; $\rho \geq 0$ ვექტორული უტოლობის ქვეშ იგულისხმება რომ $\rho^i \geq 0$, $i = \overline{1, l}$.

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0 . ვთქვათ $\zeta(\tau, \sigma, x)$ არის $[d_0, d_1] \times [h_0, h_1] \times O$ სიმრავლეზე უწყვეტი სკალარული ფუნქცია. განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$\zeta(w) = \zeta(\tau, \sigma, x(t_1)).$$

განსაზღვრება 1.3. $w_0 = (\tau_0, \sigma_0, u_0(\cdot)) \in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური თუ ნებისმიერი $w \in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობს

$$\zeta(w_0) = \zeta(\tau_0, \sigma_0, x_0(\theta_0)) \leq \zeta(w) = \zeta(\tau, \sigma, x(\theta)),$$

(1.4)

სადაც $x_0(t) = x(t; w_0)$, $y_0(t) = y(t; w)$.

(1.1)-(1.4) ამოცანას ეწოდება კვაზიწრფივი ნეიტრალური ოპტიმალური ამოცანა, ხოლო w_0 -ს -ამოცანის ამონახსნი.

თეორემა 1.1. (1.1)-(1.4) ოპტიმალური ამოცანის ამონახსნი w_0 არსებობს, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.1. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.2. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $K_1 \subset O$ ისეთი რომ ნებისმიერი $w \in W_0$ elementis შესაბამისი ამონახსნისთვის $x(t) = x(t; w), t \in [\hat{t}, t_1]$ შესრულებულია პირობა:

$$x(t) \in K_1, t \in [\hat{t}, t_1];$$

1.3. ყოველი ფიქსირებული $(t, x_1, x_2) \in [t_0, t_1] \times O^2$ წერტილისთვის სიმრავლე

$$P(t, x_1, x_2) = \{f(t, x_1, x_2, u) : u \in U\}$$

ამოზნეკილია.

თეორემა 1.1, [7]-ში მოყვანილი მეთოდით, დამტკიცებულია მე-3 პარაგრაფში. ქვემოთ-მოყვანილი თეორემები არის თეორემა 1.1-ის შედეგი და ისინი დამტკიცებულია მე-4 პარაგრაფში.

თეორემა 1.2. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.4. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.5. $f(t, x_1, x_2, u)$ ფუნქციას აქვს სახე

$$f(t, x_1, x_2, u) = B(t, x_1, x_2) + C(t, x_1, x_2)u,$$

სადაც B და C შესაბამისი განზობილების ვექტორ და მატრიც-ფუნქციებია;

1.6. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $K_1 \subset O$ ისეთი რომ ნებისმიერი $w \in W_0$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნისთვის $x(t) = x(t; w), t \in [\hat{t}, t_1]$ შესრულებულია პირობა:

$$x(t) \in K_1, t \in [\hat{t}, t_1];$$

1.7. სიმრავლე U ამოზნექილია.

მაშინ მართვის მიმართ წრფივ ოპტიმალურ ამოცანას აქვს ამონახსნი.

თეორემა 1.3. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.8. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.9. $f(t, x_1, x_2, u)$ ფუნქციას აქვს სახე

$$f(t, x_1, x_2, u) = A_1(t)x_1 + B_1(t)x_2 + C_1(t)u;$$

1.10. სიმრავლე U ამოზნექილია.

მაშინ არსებითად წრფივ ოპტიმალურ ამოცანას აქვს ამონახსნი.

შენიშვნა 1.1. ეკონომიკური ზრდის (4)-(7) ამოცანისთვის (იხ. შესავალი) შესრულებულია თეორემა 1.3-ის ყველა პირობა, ამიტომ ამ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა, სადაც $\zeta(w)$ შეცვლილია ინტეგრალური ფუნქციონალით

$$\int_{t_0}^{t_1} [a^0(t)\dot{x}(t - \sigma) + f^0(t, x(t), x(t - \tau), u(t))] dt,$$

სადაც $f^0 : I \times O^2 \rightarrow R$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $a^0(t), t \in I$ უწყვეტი სტრიქონ-ვექტორ-ფუნქცია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $F = (f^0, f)^T$.

თეორემა 1.4. ოპტიმალური ამოცანისთვის, ინტეგრალური ფუნქციონალით, არსებობს ამონახსნი w_0 თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.11. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.12. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $K_1 \subset O$ ისეთი რომ ნებისმიერი $w \in W_0$ შესაბამისი ამონახსნისთვის $x(t) = x(t; w)$, $t \in [\hat{t}, t_1]$ შესრულებულია პირობა:

$$x(t) \in K_1, t \in [\hat{t}, t_1];$$

1.13. ყოველი ფიქსირებული $(t, x_1, x_2) \in [t_0, t_1] \times O^2$ სიმრავლე

$$\{ F(t, x_1, x_2, u) : u \in U \}$$

ამოზნეკილია.

§ 2. დამხმარე დებულებები

ვთქვათ $A(t), B(t), C(t)$, $t \in I = [a, b]$, არის უწყვეტი მატრიც-ფუნქციები განზომილებით $n \times n$, ხოლო $f(t)$ - ზომადი შემოსაზღვრული n განზომილებიანი სვეტ-ვექტორ-ფუნქცია. ყოველი $\tau \in [d_0, d_1]$ და $\sigma \in [h_0, h_1]$ დაგვიანების პარამეტრებისთვის კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\dot{x}(t - \sigma) + B(t)x(t) + C(t)x(t - \tau) + f(t), t \in [t_0, t_1] \subset (a, b), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{t}, t_0], \dot{x}(t) = \zeta(t), t \in [\hat{t}, t_0] \end{cases} \quad (2.1)$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t; \tau, \sigma)$, $t \in [\hat{t}, t_1]$.

თეორემა 2.1. (2.1) ამოცანის ამონახსნი $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე წარმოდგენება ფორმულით

$$\begin{aligned} x(t; \tau, \sigma) = & \Phi(t_0; t, \tau, \sigma) \varphi(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau, \sigma) C(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0 - \sigma}^t Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma) \zeta(s) ds \\ & + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) f(s) ds \quad (\text{კოშის ფორმულა}) \end{aligned}$$

სადაც $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$, $Y(s; t, \tau, \sigma)$ არის მატრიც-ფუნქციები განზომილებით $n \times n$, ისინი აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას წინმსწრები არგუმენტით

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s; t, \tau, \sigma) = -Y(s; t, \tau, \sigma)B(s) - Y(s + \tau; t, \tau, \sigma)C(s + \tau), s \in [t_0, t], \\ Y(s; t, \tau, \sigma) = \Phi(s; t, \tau, \sigma) + Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma)A(s + \sigma), s \in [t_0, t] \end{cases} \quad (2.2)$$

და პირობას

$$\Phi(s; t, \tau, \sigma) = Y(s; t, \tau, \sigma) = \begin{cases} E, s = t, \\ \Theta, s > t, \end{cases} \quad (2.3)$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო Θ ნულოვანი მატრიცა.

დამტკიცება. ვთქვათ $t \in (t_0, t_1]$ და $s \in [t_0, t]$. განტოლების

$$\dot{x}(s) = A(s)\dot{x}(s - \sigma) + B(s)x(s) + C(s)x(s - \tau) + f(s), s \in [t_0, t]$$

ორივე მხარე გავამრავლოთ (2.3) თვისების მქონე $Y(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცზე, რომელიც $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცთან ერთად აკმაყოფილებს (2.2) სისტემას და ვაინტეგრირებთ მიღებული ტოლობა მონაკვეთზე $[t_0, t]$. მივიღებთ

$$\int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) \dot{x}(s) ds = \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) [A(s)\dot{x}(s - \sigma) + B(s)x(s) + C(s)x(s - \tau) + f(s)] ds. \quad (2.4)$$

ცვლადთა გარდაქმნით და (2.3)-ის პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) A(s) \dot{x}(s - \sigma) ds = \int_{t_0 - \sigma}^{t - \sigma} Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma) \dot{x}(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0-\sigma}^{t_0} Y(s+\sigma; t, \tau, \sigma) A(s+\sigma) \zeta(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s+\sigma; t, \tau, \sigma) A(s+\sigma) \dot{x}(s) ds; \\
&\int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) C(s) x(s-\tau) ds = \int_{t_0-\tau}^{t-\tau} Y(s+\tau; t, \tau, \sigma) C(s+\tau) x(s) ds \\
&= \int_{t_0-\tau}^{t_0} Y(s+\tau; t, \tau, \sigma) C(s+\tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s+\tau; t, \tau, \sigma) C(s+\tau) x(s) ds
\end{aligned}$$

ვისარგებლებთ რა უკანასკნელი თანაფარდობებით (2.4)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t [Y(s; t, \tau, \sigma) - Y(s+\sigma; t, \tau, \sigma) A(s+\sigma)] \dot{x}(s) ds \\
&= \int_{t_0}^t [Y(s; t, \tau, \sigma) B(s) + Y(s+\tau; t, \tau, \sigma) C(s+\tau)] x(s) ds + \int_{t_0-\tau}^{t_0} Y(s+\tau; t, \tau, \sigma) C(s+\tau) \varphi(s) ds \\
&+ \int_{t_0-\sigma}^{t_0} Y(s+\sigma; t, \tau, \sigma) A(s+\sigma) \zeta(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) f(s) ds. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

(2.2) სისტემის მიხედვით $Y(s; t, \tau, \sigma)$ ისეთი მატრიც-ფუნქციაა რომ $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ აბსოლუტურად უწყვეტია s ცვლადის მიმართ. ეს საშუალებას გვაძლევს (2.5)-ის მარცხენა მხარეში მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \Phi(s; t, \tau, \sigma) \dot{x}(s) ds &= \Phi(t; t, \tau, \sigma) x(t) - \Phi(t_0; t, \tau, \sigma) x(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s; t, \tau, \sigma) x(s) ds \\
&= x(t) - \Phi(t_0; t, \tau, \sigma) \varphi(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s; t, \tau, \sigma) x(s) ds. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

(2.5)-(2.6)-დან გარკვეული დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Phi(t_0; t, \tau, \sigma) \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial}{\partial s} \Phi(s; t, \tau, \sigma) + Y(s; t, \tau, \sigma) B(s) + Y(s + \tau; t, \tau, \sigma) C(s + \tau) \right] x(s) ds \\
&+ \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau, \sigma) C(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0 - \sigma}^{t_0} Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma) \zeta(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) f(s) ds \\
&= \Phi(t_0; t, \tau, \sigma) \varphi(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau, \sigma) C(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0 - \sigma}^{t_0} Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma) \zeta(s) ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) f(s) ds.
\end{aligned}$$

$Y(s; t, \tau, \sigma)$ და $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცების აგება ბიჯის მეთოდით. თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ (2.2) სისტემა შედგება ჩვეულებრივი დიფერენციალური და ალგებრული სხვაობიანი განტოლებისგან. $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცა $s \in [t_0, t]$ ცვლადის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტია, რადგანაც იგი არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი საწყისი პირობით მარჯვენა ბოლოში

$$\Phi(t; t, \tau, \sigma) = E, \quad \Phi(s; t, \tau, \sigma) = \Theta, \quad s > t.$$

შემდგომში ნაჩვენები იქნება რომ $Y(s; t, \tau, \sigma)$ ფუნქცია, საზოგადოდ წყვეტილია, წერტილებში $t, t - \sigma, t - 2\sigma$ და ა.შ. ვთქვათ $t \in (t_0, t_1]$, $\tau \in [d_0, d_1]$ და $\sigma \in [h_0, h_1]$ ფიქსირებული რიცხვებია. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\left\lfloor \frac{t - t_0}{\sigma} \right\rfloor = m, \quad \left\lfloor \frac{t - t_0}{\tau} \right\rfloor = k, \quad \text{სადაც } [\alpha] \text{ აღნიშნავს } \alpha \text{ რიცხვის მთელ ნაწილს.}$$

დავუშვათ $m = 2$, მაშინ $t - \sigma > t_0$, $t - 2\sigma > t_0$, ხოლო $t - 3\sigma < t_0$. ვთქვათ $s \in [t - \sigma, t]$, სხვაობიანი განტოლებიდან ნაპოვნი მატრიცი აღვნიშნოთ $Y_1(s; t, \sigma, \tau)$ მივიღებთ

$$Y_1(s; t, \sigma, \tau) = \Phi(s; t, \tau, \sigma), \quad s \in [t - \sigma, t].$$

ცხადია $Y_1(s; t, \sigma, \tau)$ უწყვეტია $[t - \sigma, t]$ მონაკვეთზე. ვთქვათ $s \in [t - 2\sigma, t - \sigma]$, სხვაობიანი განტოლებიდან ნაპოვნი მატრიცი აღვნიშნოთ $Y_2(s; t, \sigma, \tau)$ მივიღებთ

$$Y_2(s;t,\tau,\sigma) = \Phi(s;t,\tau,\sigma) + \Phi(s+\sigma;t,\tau,\sigma)A(s+\sigma), s \in [t-2\sigma, t-\sigma],$$

რომელიც იქნება უწყვეტი $[t-2\sigma, t-\sigma]$ -ზე. ვთქვათ $s \in [t_0, t-2\sigma]$, სხვაობიანი განტოლებიდან ნაპოვნი მატრიცი აღვნიშნოთ $Y_3(s;t,\sigma,\tau)$ მივიღებთ

$$Y_3(s;t,\tau,\sigma) = \Phi(s;t,\tau,\sigma) + \Phi(s+\sigma;t,\tau,\sigma)A(s+\sigma)$$

$$+ \Phi(s+2\sigma;t,\tau,\sigma)A(s+2\sigma)A(s+\sigma), t \in [t_0, t-2\sigma],$$

რომელიც იქნება უწყვეტი $[t_0, t-2\sigma]$ -ზე. $Y_i(\cdot), i=1,2,3$ მატრიცებისგან $[t_0, \infty]$ -ზე. ავაგოთ $Y(s;t,\tau,\sigma)$, რომელსაც ვუწოდებთ სხვაობიანი განტოლების ამონახსნს

$$Y(s;t,\tau,\sigma) = \begin{cases} \Theta, & s > t, \\ Y_1(s;t,\tau,\sigma), & t \in (t-\sigma, t], \\ Y_2(s;t,\tau,\sigma), & t \in (t-2\sigma, t-\sigma], \\ Y_3(s;t,\tau,\sigma), & t \in [t_0, t-2\sigma]. \end{cases} \quad (2.7)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $Y(s;t,\tau,\sigma)$ ფუნქცია წყვეტილია წერტილებში $t, t-\sigma, t-2\sigma$. გამოვთვალოთ ნახტომები წყვეტის წერტილებში

$$Y(t-;t,\tau,\sigma) - Y(t+;t,\tau,\sigma) = E - \Theta = E; \text{ (ნახტომი)}$$

$$Y(t-\sigma-;t,\tau,\sigma) - Y(t-\sigma+;t,\tau,\sigma) = Y_2(t-\sigma-;t,\tau,\sigma) - Y_1(t-\sigma+;t,\tau,\sigma)$$

$$= \Phi(t-\sigma;t,\tau,\sigma) + \Phi(t-;t,\tau,\sigma)A(t) - \Phi(t-\sigma;t,\tau,\sigma) = A(t); \text{ (ნახტომი)}$$

$$Y(t-2\sigma-;t,\tau,\sigma) - Y(t-2\sigma+;t,\tau,\sigma) = Y_3(t-2\sigma-;t,\tau,\sigma) - Y_2(t-2\sigma+;t,\tau,\sigma)$$

$$= \Phi(t-2\sigma;t,\tau,\sigma) + \Phi(t-\sigma;t,\tau,\sigma)A(t-\sigma) + \Phi(t-;t,\tau,\sigma)A(t)A(t-\sigma)$$

$$- \Phi(t-2\sigma;t,\tau,\sigma) - \Phi(t-\sigma;t,\tau,\sigma)A(t-\sigma) = A(t)A(t-\sigma). \text{ (ნახტომი)}$$

(2.7) და მახასიათებელი ფუნქციების გამოყენებით $Y(s; t, \tau, \sigma)$ შეიძლება გამოვსახოთ $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცის საშუალებით. მართლაც,

$$Y(s; t, \tau, \sigma) = \Theta \chi_0(s) + \Phi(s; t, \tau, \sigma) \chi_1(s) + [\Phi(s; t, \tau, \sigma) + \Phi(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma)] \chi_2(s)$$

$$[\Phi(s; t, \tau, \sigma) + \Phi(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma) + \Phi(s + 2\sigma; t, \tau, \sigma) A(s + 2\sigma) A(s + \sigma)] \chi_3(s), \quad (2.8)$$

სადაც $\chi_0(s)$ არის (t, ∞) ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია; $\chi_1(s)$ არის $(t - \sigma, t]$ ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია; $\chi_2(s)$ არის $(t - 2\sigma, t - \sigma]$ ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია; $\chi_3(s)$ არის $[t_0, t - 2\sigma]$ ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია.

(2.8) შევიტანოთ (2.2) განტოლებაში, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას წინმსწრები არგუმენტით, რომლის მარჯვენა მხარეში შედის მხოლოდ $\Phi(\cdot)$ მატრიცი. ამის შემდეგ ბიჯის მეთოდით ინტერვალებზე $(t - \tau, t]$, $(t - 2\tau, t - \tau]$ და ა. შ. ვიპოვოთ ამონახსნების ნაჭრებს, რომლებსაც უწყვეტად გადავბამთ $t - \tau, t - 2\tau$ და ა. შ.

წერტილებში. მივიღებთ

სამეზნ $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცს. ასეთი წესით ავაგებთ მატრიცებს ნებისმიერი t, σ და τ რიცხვებისთვის შესაბამის ინტერვალებიდან.

თეორემა 2.2. $Y(s; t, \tau, \sigma)$ და $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცები შემოსზღვრულია სიმრავლეზე

$$\Pi = \{(s, t, \tau, \sigma) : s \in [t_0, t], t \in [t_0, t_1], \tau \in [d_0, d_1], \sigma \in [h_0, h_1]\}.$$

ეს თეორემა გამომდინარეობს $Y(s; t, \tau, \sigma)$ და $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$ მატრიცების სტრუქტურიდან.

ყოველ $w = (\tau, \sigma, u(\cdot)) \in W$ ელემენტს შევუსაბამოთ კვაზიწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{q}(t) = A(t)h(t_0, \zeta, \dot{q})(t - \sigma) + f(t, q(t), h(t_0, \varphi, q)(t - \tau), u(t)), t \in [t_0, t_1] \quad (2.9)$$

საწყისი პირობით

$$q(t_0) = \varphi(t_0) \quad (2.10)$$

სადაც ოპერატორი $h(t_0, \varphi, q)(t)$ განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$h(t_0, \varphi, q)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\hat{t}, t_0], \\ q(t), & t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (2.11)$$

განსაზღვრება 2.1. ვთქვათ $w = (\tau, \sigma, u(\cdot)) \in W$ ფიქსირებული ელემენტია. $q(t) \in O, t \in [t_0, t_1]$ ფუნქციას ეწოდება (2.9) განტოლების ამონახსნი (2.10) საწყისი პირობით ან w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (2.10) საწყის პირობას, აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0, t_1]$ -ზე და ამავე ინტერვალზე თ. ყ. აკმაყოფილებს (2.9) განტოლებას.

ვთქვათ $K_i \subset O, i = 2, 3$ კომპაქტური სიმრავლეებია: K_3 შეიცავს K_2 სიმრავლის რაიმე მიდამოს.

თეორემა 2.3. ვთქვათ $q_i(t) \in K_2, i = 1, 2, \dots$ არის $w_i = (\tau_i, \sigma_i, u_i(\cdot)) \in W, i = 1, 2, \dots$, ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ საკმარისად დიდი $i_0 \geq 1$ არსებობს $\delta > 0$ და $M > 0$ ისე რომ $\forall i > i_0$ -თვის w_i ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $\psi_i(t)$ განსაზღვრული ინტერვალზე $[t_0 - \delta, t_1 + \delta] \subset I$. გარდა ამისა,

$$\psi_i(t) \in K_3, \quad |\dot{\psi}_i(t)| < M, \quad t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta], \quad i > i_0$$

და

$$\psi_i(t) = q_i(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ K_2 სიმრავლის ჩაკეტილი ε - მიდამო

$$K_2(\varepsilon) = \{x \in O : \exists \hat{x} \in K_2, |x - \hat{x}| \leq \varepsilon\}$$

შედის $\text{int } K_3$. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $Q \subset R_x^n \times R_x^n$ და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $\chi : R_x^n \times R_x^n$ ისეთი რომ

$$K_2(\varepsilon) \times [K_0 \cup K_2(\varepsilon)] \subset Q \subset K_3 \times [K_0 \cup K_3], \text{ სადაც } K_0 = \varphi([\hat{t}, b])$$

და

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in Q, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin K_3 \times [K_0 \cup K_3]. \end{cases}$$

ყოველი $i = 1, 2, \dots$ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{\psi}(t) = A(t)h(t_0, \varsigma, \psi)(t - \sigma_i) + \Psi(t, \psi(t), h(t_0, \varphi, \psi)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in I$$

სადაც

$$\Psi(t, x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) f(t, x_1, x_2, u)$$

საწყისი პირობით

$$\psi(t_0) = \varphi(t_0)$$

აქვს ამონახსნი $\psi_i(t)$, რომელიც განმარტებული I -ზე და აკმაყოფილებს პირობას

$\psi_{i1}(t) \in K_3, t \in I$ ([9]-ში იხ. თეორემა 1.3 დამტკიცება). რადგანაც

$$(q_i(t), h(t_0, \varphi, q_i)(t - \tau_i)) \in K_2 \times [K_0 \cup K_2] \subset Q, t \in [t_0, t_1]$$

(იხ. (2.11)). ამიტომ

$$\chi(q_i(t), h(t_0, \varphi, q_i)(t - \tau_i)) = 1, t \in [t_0, t_1]$$

ე.ი.

$$\Psi(t, q_i(t), h(t_0, \varphi, q_i)(t - \tau_i), u_i(t)) = f(t, q_i(t), h(t_0, \varphi, q_i)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0, t_1].$$

ერთადერთობის გამო

$$\psi_i(t) = q_i(t), t \in [t_0, t_1]. \quad (2.12)$$

არსებობს $M > 0$ ისეთი რომ

$$|\dot{\psi}_i(t)| < M, t \in I, i = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

მართლაც, პირველ რიგში შევნიშნავთ

$$\begin{aligned} & |\Psi(t, \psi_i(t), h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \tau_i), u_i(t))| \\ & \leq \sup \{ |\Psi(t, x_1, x_2, u)| : t \in I, (x_1, x_2) \in K_3 \times [K_0 \cup K_3], u \in U \} = N_1, i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\left[\frac{b - t_0}{\sigma_i} \right] = \left[\frac{b - t_0}{\sigma_0} \right] := d, i \geq i_0$$

ე.ი.

$$t_0 + d\sigma_i \leq b < t_0 + (d + 1)\sigma_i.$$

თუ $t \in [a, t_0 + \sigma_i)$ მაშინ

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}_i(t)| &= |A(t)\zeta(t - \sigma_i) + \Psi(t, \psi_i(t), h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \tau_i), u_i(t))| \\ &\leq \|A\|N_2 + N_1 := M_1, \end{aligned}$$

სადაც

$$\|A\| = \sup \{ |A(t)| : t \in I \}, \quad N_2 = \{ |\zeta(t)| : t \in I \}.$$

ვთქვათ $t \in [t_0 + \sigma_i, t_0 + 2\sigma_i)$ მაშინ

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}_i(t)| &= |A(t)\dot{\psi}_i(t - \sigma_i)| + |\Psi(t, \psi_i(t), h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \tau_i), u_i(t))| \\ &\leq \|A\|M_1 + N_1 := M_2. \end{aligned}$$

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ

$$|\dot{\psi}_i(t)| \leq \|A\| M_{j-1} + N_1 := M_j, t \in [t_0 + (j-1)\sigma_i, t_0 + j\sigma_j], j = 3, \dots, d.$$

გარდა ამისა, თუ $t_0 + d\sigma_i < b$ მაშინ გვექნება

$$|\dot{\psi}_i(t)| \leq M_{d+1}, t \in [t_0 + d\sigma_i, b].$$

ცხადია, რომ

$$M = \max \{M_1, \dots, M_{d+1}\}$$

რიცხვისთვის შესრულებულია (2.13) უტოლობა. არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $[t_0 - \delta, t_1 + \delta] \subset I$ და ადგილი აქვს უტოლობას

$$\begin{aligned} |\psi_i(t) - \psi_i(t_0)| &\leq \int_t^{t_0} |A(s)h(t_0, \varsigma, \dot{\psi}_i)(s - \sigma_i)| ds \\ &\leq \int_t^{t_0} |\Psi(s, \psi_i(s), h(t_0, \varphi, \psi_i)(s - \tau_i), u_i(s))| ds \leq \varepsilon, t \in [t_0 - \delta, t_0]; \\ |\psi_i(t) - \psi_i(t_1)| &\leq \int_{t_1}^t |A(s)h(t_0, \varsigma, \dot{\psi}_i)(s - \sigma_i)| ds \\ &\leq \int_{t_1}^t |\Psi(s, \psi_i(s), h(t_0, \varphi, \psi_i)(s - \tau_i), u_i(s))| ds \leq \varepsilon, t \in [t_1, t_1 + \delta]. \end{aligned}$$

ამ უტოლობებიდან და $\psi_i(t_0), \psi_i(t_1) \in K_2$ პირობის გათვალისწინებით დავასკვნით რომ

$$(\psi_i(t), h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \tau_i)) \in K_2(\varepsilon) \times [K_0 \cup K_2(\varepsilon)] \subset Q, t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta].$$

ე. ი.

$$\chi(\psi_i(t), h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \tau_i)) = 1, t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta]$$

ამრიგად, $\psi_i(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\psi}_i(t) = A(t)h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \sigma_i) + \Psi(t, \psi_i(t), h(t_0, \varphi, \psi_i)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta]$$

და პირობებს

$$\psi_i(t_0) = \varphi(t_0), \quad \psi_i(t) \in K_3, \quad t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta].$$

მაშასადამე, $\psi_i(t)$ ამონახსნი შეესაბამება $w_i \in W$ ელემენტს, განსაზღვრულია $[t_0 - \delta, t_1 + \delta]$ მონაკვეთზე და აკმაყოფილებს პირობებს :

$$\psi_i(t) \in K_3, \quad |\dot{\psi}_i(t)| < M, \quad t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta], \quad i > i_0; \quad \psi_i(t) = q_i(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

(იხ. (2.12) და (2.13)). თეორემა დამტკიცებულია.

$C = C(I, R_z^m)$ აღნიშნავს უწყვეტ $z(t) \in R_z^m, t \in I = [a, b]$ ფუნქციათა სივრცეს ნორმით

$$\|z\| = \max_{t \in I} |z(t)|.$$

განსაზღვრება 2.2. $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება თანაბარ-შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $N > 0$ რომ $|z_i(t)| < N, \forall t \in I, i = 1, 2, \dots$

განსაზღვრება 2.3. $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, რომ $\forall t', t'' \in I : |t' - t''| < \delta$ ადგილი აქვს უტოლობას $|z_i(t') - z_i(t'')| < \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots$

ლემა 2.1 (არცელა-ასკოლი). თუ $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბარ-შემოსაზღვრულია და თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტი, მაშინ მისგან შეიძლება გამოიყოს ქვემიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია უწყვეტი $z_0(t)$ ფუნქციისკენ ე.ი. არსებობს ისეთი ქვემიმდევრობა $z_{i_k}(\cdot) \in C, k = 1, 2, \dots$ რომ $\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_{i_k} - z_0\| = 0$.

განსაზღვრება 2.4. $z_i(\cdot), i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება თანაბარ-ლიფშიცური, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $H > 0$ რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|z_i(t') - z_i(t'')| < H|t' - t''|, \forall t', t'' \in I; \forall i = 1, 2, \dots$$

ლემა 2.2. თუ $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა არის თანაბარ-ლიფშიცური, მაშინ იგი თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტია.

განსაზღვრება 2.5. $z(t), t \in I$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, რომ I სეგმენტის ნებისმიერი არაგადამფარავი სეგმენტთა $[a_k, b_k], k = 1, 2, \dots, m$ სასრული სისტემისთვის, რომლისთვისაც

$$\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta,$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^m |z(b_i) - z(a_i)| < \varepsilon.$$

$L_1 = L_1(I, R_z^m)$ აღნიშნავს ზომად $z(t) \in R_z^m, t \in I$ და ლებეგის აზრით ინტეგრებად (ჯამებად) ფუნქციათა სივრცეს. ტოლობა სამართლიანია თ. ყ.-გან ნიშნავს, რომ მას ადგილი არა აქვს ნულზომის სიმრავლეზე.

ლემა 2.3 (ლებეგი). აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია $z(\cdot) \in C$ თითქმის ყველგან წარმოებადია, მისი წარმოებული $\dot{z}(t)$ (წარმოებული განმარტებულია თ. ყ.) ზომადია და კკუთვნიის L_1 სივრცეს. გარდა ამის,

$$z(t) = z(a) + \int_a^t \dot{z}(s) ds, \quad t \in I.$$

ლემა 2.4. ვთქვათ $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობაა და მიმდევრობა $\dot{z}_i(t), i = 1, 2, \dots$ თანაბარ-შემოსაზღვრულია, ე.ი. არსებობს ისეთი მუდმივი $H > 0$ რომ $|\dot{z}_i(t)| < H, i = 1, 2, \dots$ მაშინ $z_i(t), i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბრად-ხარისხოვნად უწყვეტია.

მართლაც,

$$|z_i(t') - z_i(t'')| = \left| \int_{t'}^{t''} |\dot{z}_i(s)| ds \right| < H|t' - t''|.$$

აქედან გამომდინარეობს თანაბრად-ხარისხოვნად უწყვეტობა.

განსაზღვრება 2.6. $z(\cdot) \in L_1$ ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $N > 0$ რომ $|z(t)| \leq N$ თ. გ. $t \in I$.

განსაზღვრება 2.7. ფუნქციათა მიმდევრობას $z_i(\cdot) \in L, i = 1, 2, \dots$ ეწოდება სუსტად კრებადი $z_0(\cdot)$ ფუნქციისკენ, თუ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ზომადი $\chi(t)$ სტრიქონ-ფუნქციისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b \chi(s) z_i(s) ds = \int_a^b \chi(s) z_0(s) ds.$$

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ფუნქციათა მიმდევრობა $z_i(\cdot) \in L, i = 1, 2, \dots$ სუსტად კრებადი $z_0(\cdot)$ ფუნქციისკენ, მაშინ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^t z_i(s) ds = \int_a^t z_0(s) ds, \quad \forall t \in I. \quad (2.13)$$

ლემა 2.5. თუ ფუნქციათა მიმდევრობა $z_i(\cdot) \in L, i = 1, 2, \dots$ თანაბარ-შემოსაზღვრულია, მაშინ მისგან შეიძლება გამოვყოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა.

Teorema 2.4. ([10], გვ. 257). ვთქვათ $p : [t_0, t_1] \times U \rightarrow R_x^n$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო

$$P(t) = \{p(t, u) : u \in U\}$$

ამოზნეცილი სიმრავლე. ვთქვათ

$$p_i(\cdot) \in L_1([t_0, t_1], R_x^n), \quad p_i(t) \in P(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{თ. გ. } [t_0, t_1] \text{-ზე.}$$

გარდა ამისა,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i(t) = p(t) \quad \text{სუსტად } [t_0, t_1] \text{-ზე.}$$

მაშინ

$$p(t) \in P(t) \quad \text{თ. გ. } [t_0, t_1] \text{-ზე}$$

და არსებობს ზომადი ფუნქცია $u(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$ ისეთი რომ

$$p(t, u(t)) = p(t) \quad \text{თ. გ. } [t_0, t_1] \text{-ზე.}$$

3. თეორემა 1.1-ის დამტკიცება

ვთქვათ $w_i = (\tau_i, \sigma_i, u_i(\cdot)) \in W_0$, $i = 1, 2, \dots$, და $x_i(t) = x(t; w_i)$, $i = 1, 2, \dots$, არის მისი შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა, w_i , $i = 1, 2, \dots$, არის მინიმიზირებადი მიმდევრობა ე.ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(w_i) = \hat{\zeta} = \inf_{w \in W_0} \zeta(w).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმეთ, რომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \tau_0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = \sigma_0.$$

ცხადია, რომ

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t - \sigma_1) + f(t, x_i(t), x_i(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0, t_1], \\ x_i(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0], \dot{x}_i(t) = \zeta(t), t \in [\hat{\tau}, t_0) \end{cases}$$

და

$$\zeta(w_i) = \zeta(\tau_i, \sigma_i, x_i(t_1)).$$

ყოველ $w = (\tau, \sigma, u(\cdot)) \in W$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{\psi}(t) = A(t)h(t, \zeta, \psi)(t - \sigma_i) + f(t, \psi(t), h(t_0, \varphi, \psi)(t - \tau), u(t)), t \in [t_0, t_1] \quad (3.1)$$

საწყისი პირობით

$$\psi(t_0) = \varphi(t_0).$$

ცხადია, რომ

$$\dot{x}_i(t) = A(t)h(t_0, \zeta, \dot{x}_i)(t - \sigma_i) + f(t, x_i(t), h(t_0, \varphi, x_i)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0, t_1]$$

და

$$x_i(t_0) = \varphi(t_0)$$

(იხ. (2.11)). ამრიგად, $x_i(t)$ არის (3.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება

$w_i = (\tau_i, \sigma_i, u_i(\cdot)) \in W_0$ ელემენტს. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $K_1 \subset O$ ისეთი, რომ $x_i(t) \in K_1, t \in [\hat{\tau}, t_1]$ (იხ. თეორემა 1.1-ის 1.2 პირობა). ვთქვათ $K_3 \subset O$ არის კომპაქტი, რომელიც შეიცავს K_1 -ის რაიმე მიდამოს, თეორემა 2.3-ის თანახმად საკმარისად დიდი i_0 -თვის არსებობს $x_i(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $\psi_i(t) \in K_3, t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta]$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$|\dot{\psi}_i(t)| < M, t \in [t_0 - \delta, t_1 + \delta].$$

აქედან გამომდინარეობს $\psi_i(t), i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობების თანაბარ-ხარისხოვნად

უწყვეტობა (იხ. ლემა 2.4). არცელა-ასკოლის ლემის თანახმად, ამ მიმდევრობიდან

შეიძლება გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა, რომელსაც კვლავ აღვნიშნავთ

$$\psi_i(t), i = 1, 2, \dots \text{ ამრიგად,}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \psi_i(t) = \psi_0(t) \text{ თანაბრად } [t_0 - \delta, t_1 + \delta] \text{-ზე.}$$

შემდეგ, $\dot{\psi}_i(t), i=1,2,\dots$ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა (იხ.ლემა 2.5), რომელსაც კვლავ აღვნიშნავთ $\psi_i(t), i=1,2,\dots$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\psi}_i(t) = \gamma(t) \text{ სუსტად } [t_0 - \delta, t_1 + \delta] \text{-ზე.}$$

ცხადია,

$$\psi_0(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi_i(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} [\psi_i(t_0 - \delta) + \int_{t_0 - \delta}^t \dot{\psi}_i(s) ds] = \psi_0(t_0 - \delta) + \int_{t_0 - \delta}^t \gamma(s) ds.$$

ამრიგად, $\dot{\psi}_0(t) = \gamma(t)$ ე.ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\psi}_i(t) = \dot{\psi}_0(t) \text{ სუსტად } [t_0 - \delta, t_1 + \delta] \text{-ზე.}$$

შემდეგ,

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t [A(s)h(t_0, \varsigma, \dot{\psi}_0)(s - \sigma_0) + f(s, \psi_0(s), h(t_0, \varphi, \psi_0)(s - \tau_0), u_i(s))] ds \\ + \mathcal{G}_i(t) + \theta_i(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

სადაც

$$\mathcal{G}_i(t) = \int_{t_0}^t \mu(s) ds, \quad \mu_i(s) = A(s)[h(t_0, \varsigma, \dot{\psi}_i)(s - \sigma_i) - h(t_0, \varsigma, \dot{\psi}_0)(s - \sigma_0)],$$

$$\theta_i(t) = \int_{t_0}^t \lambda_i(s) ds,$$

$$\lambda_i(s) = f(s, \psi_i(s), h(t_0, \varphi, \psi_i)(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, \psi_0(s), h(t_0, \varphi, \psi_0)(s - \tau_0), u_i(s)).$$

პირველ რიგში გარდავქმნათ $\mathcal{G}_i(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\rho_{1i} = \min \{ t_0 + \sigma_i, t_0 + \sigma_0 \}, \rho_{2i} = \max \{ t_0 + \sigma_i, t_0 + \sigma_0 \}.$$

ვთქვათ, $t \in [t_0, \rho_{1i})$, მაშინ $s - \sigma_i < t_0$ და $s - \sigma_0 < t_0$ როცა $s \in [t_0, \rho_{1i})$. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\mu_i(s) = A(s)[\zeta(s - \sigma_i) - \zeta(s - \sigma_0)].$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_i(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)[\zeta(s - \sigma_i) - \zeta(s - \sigma_0)] ds \right| = \left| \int_{t_0 - \sigma_i}^{t - \sigma_i} A(s + \sigma_i) \zeta(s) ds - \int_{t_0 - \sigma_0}^{t - \sigma_0} A(s + \sigma_0) \zeta(s) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0 - \sigma_i}^{t_0 - \sigma_0} A(s + \sigma_i) \zeta(s) ds + \int_{t_0 - \sigma_0}^{t_0} A(s + \sigma_i) \zeta(s) ds + \int_{t_0}^{t - \sigma_i} A(s + \sigma_i) \zeta(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0 - \sigma_0}^{t_0} A(s + \sigma_0) \zeta(s) ds - \int_{t_0}^{t - \sigma_0} A(s + \sigma_0) \zeta(s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0 - \sigma_i}^{t_0 - \sigma_0} A(s + \sigma_i) \zeta(s) ds \right| + \left| \int_{t_0}^{\rho_{1i} - \sigma_i} A(s + \sigma_i) \zeta(s) ds \right| + \left| \int_{t_0}^{\rho_{1i} - \sigma_0} A(s + \sigma_0) \zeta(s) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_0 - \sigma_0}^{t_0} A(s + \sigma_i) - A(s + \sigma_0) \right| |\zeta(s)| ds. \end{aligned}$$

პირველი, მეორე და მესამე ინტეგრალები მიისწრაფიან ნულისკენ, რადგანაც საზღვრების სხვაობა მიისწრაფის ნულისკენ, ხოლო ინტეგრალქვეშა ფუნქციები შემოსაზღვრულია. მე-4 ინტეგრალი მიისწრაფის ნულისკენ, რადგანაც $\zeta(s)$ შემოსაზღვრულია და

$$|A(s + \sigma_i) - A(s + \sigma_0)| \rightarrow 0.$$

ამრიგად,

$$\max_{t \in [t_0, \rho_{1i}]} \mathcal{G}_i(t) \rightarrow 0.$$

ვთქვათ, $t \in [\rho_{1i}, \rho_{2i}]$ მაშინ

$$|\mathcal{G}_i(t)| = |\mathcal{G}_i(\rho_{1i}) + \int_{\rho_{1i}}^t \mu_i(s) ds| \leq |\mathcal{G}_i(\rho_{1i})| + \left| \int_{\rho_{1i}}^{\rho_{2i}} \mu_i(s) ds \right|$$

ე. ი.

$$\max_{t \in [\rho_{1i}, \rho_{2i}]} \mathcal{G}_i(t) \rightarrow 0.$$

ვთქვათ, $t \in [\rho_{2i}, t_1]$ მაშინ $s - \sigma_i \geq t_0$ და $s - \sigma_0 \geq t_0$ როცა $s \in [\rho_{2i}, t_1]$. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\mu_i(s) = A(s)[\psi_i(s - \sigma_i) - \psi_0(s - \sigma_0)].$$

ამრიგად,

$$|\mathcal{G}_i(t)| = |\mathcal{G}_i(\rho_{2i}) + \int_{\rho_{2i}}^t \mu_i(s) ds| \leq |\mathcal{G}_i(\rho_{2i})|$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{\rho_{2i}}^t A(s) [\psi_i(s - \sigma_i) - \psi_0(s - \sigma_0)] ds \right| = | \mathcal{G}_i(\rho_{2i}) | + \left| \int_{\rho_{2i} - \sigma_i}^{t - \sigma_i} A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s) ds - \int_{\rho_{2i} - \tau_0}^{t - \tau_0} A(s + \tau_0) \dot{\psi}_0(s) ds \right| \\
& \leq | \mathcal{G}_i(\rho_{2i}) | + \left| \int_{\rho_{2i} - \sigma_i}^{t_0} A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s) ds + \int_{t_0}^{t - \tau_0} A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s) ds + \int_{t - \tau_0}^{t - \sigma_i} A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_{\rho_{2i} - \tau_0}^{t_0} A(s + \tau_0) \dot{\psi}_0(s) ds - \int_{t_0}^{t - \tau_0} A(s + \tau_0) \dot{\psi}_0(s) ds \right| \\
& \leq | \mathcal{G}_i(\rho_{2i}) | + \left| \int_{\rho_{2i} - \sigma_i}^{t_0} |A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s)| ds \right| + \left| \int_{t_0 - \tau_0}^{\rho_{1i} - \sigma_i} |A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s)| ds \right| + \left| \int_{\rho_{2i} - \tau_0}^{\tau_0} |A(s + \tau_0) \dot{\psi}_0(s)| ds \right| \\
& \quad + \left| \int_{t_0}^{t - \tau_0} [A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s) - A(s + \sigma_0) \dot{\psi}_0(s)] ds \right|.
\end{aligned}$$

პირველი შესაკრები მიისწრაფის ნულისკენ, მე-2, მე-3 და მე-4 შესაკრებები მიისწრაფის ნულისკენ, რადგანაც საზღვრების სხვაობა მიისწრაფის ნულისკენ, ხოლო ინტეგრალქვეშა ფუნქციები შემოსაზღვრულია. ბოლო ინტეგრალისთვის გვექნება

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t_0}^{t - \tau_0} [A(s + \sigma_i) \dot{\psi}_i(s) - A(s + \sigma_0) \dot{\psi}_0(s)] ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |A(s + \sigma_i) - A(s + \sigma_0)| |\dot{\psi}_i(s)| ds \\
& + \left| \int_{t_0}^{t - \tau_0} A(s + \sigma_0) [\dot{\psi}_i(s) - \dot{\psi}_0(s)] ds \right|.
\end{aligned}$$

$\dot{\psi}_i(s), i = 1, 2, \dots$ შემოსაზღვრულია და სუსტად მიისწრაფის $\dot{\psi}_i(s)$ ამიტომ ეს ინტეგრალები მისწრაფიან ნულისკენ, ე.ი.

$$\max_{t \in [\rho_{2i}, t_1]} \mathcal{G}_i(t) \rightarrow 0.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$| \mathcal{G}_i(t) | \leq \max_{t \in [t_0, \rho_{1i}]} \mathcal{G}_i(t) + \max_{t \in [\rho_{1i}, \rho_{2i}]} \mathcal{G}_i(t) + \max_{t \in [\rho_{2i}, t_1]} \mathcal{G}_i(t) \rightarrow 0.$$

ამრიგად,

$$\mathcal{G}_i(t) \rightarrow 0 \text{ თანაბრად } [t_0, t_1] \text{-ზე.}$$

შევაფასოთ $\theta_i(t)$, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$s_{i1} = \min \{t_0 + \tau_i, t_0 + \tau_0\}, \quad s_{i2} = \max \{t_0 + \tau_i, t_0 + \tau_0\}.$$

გვაქვს

$$|\theta_i(t)| \leq \int_{t_0}^{s_{i1}} |\lambda_i(s)| ds + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} |\lambda_i(s)| ds + \int_{s_{i2}}^{\theta_0} |\lambda_i(s)| ds = \lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \lambda_{3i}.$$

გარდავქმნათ λ_{1i} : ვთქვათ $s_{i1} = t_0 + \tau_0$ ე. ი. $\tau_0 - \tau_i < 0$, მაშინ გვქვია

$$\lambda_{1i} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau_0} |\lambda_i(s)| ds.$$

ამ შემთხვევაში როცა $s \in (t_0, t_0 + \tau_0)$, მაშინ $s - \tau_i \in (t_0 - \tau_i, t_0 + \tau_0 - \tau_i) \subset (\hat{\tau}, t_0)$ და

$s - \tau_0 \in (t_0 - \tau_0, t_0) \subset (\hat{\tau}, t_0)$. ამიტომ $\lambda_i(s), s \in [t_0, t_0 + \tau_0]$ ექნება სახე

$$f(s, \psi_i(s), \varphi(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, \psi_0(s), \varphi(s - \tau_0), u_i(s)). \quad (3.3)$$

ფუნქცია $f(s, x_1, x_2, u)$ თანაბრად უწყვეტია $I \times K_3^2 \times U$ ამიტომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [f(s, \psi_i(s), \varphi(s - \tau_i), u) - f(s, \psi_0(s), \varphi(s - \tau_0), u)] = 0 \quad \text{თანაბრად}$$

$$(s, u) \in [t_0, t_0 + \tau_0] \times U.$$

ამრიგად,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i(s) = 0 \quad \text{თანაბრად } s \in [t_0, t_0 + \tau_0].$$

ე. ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{1i} = 0. \quad (3.4)$$

ახლა ვთქვათ, $s_{i1} = t_0 + \tau_i$ ე.ი. $\tau_0 - \tau_i > 0$, როცა $s \in (t_0, t_0 + \tau_i)$, მაშინ $s - \tau_i \in (t_0 - \tau_i, t_0) \subset (\hat{\tau}, t_0)$ და $s - \tau_0 \in (t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_i - \tau_0) \subset (\hat{\tau}, t_0)$. ანალოგიური მსჯელობით დავასკნით, რომ როცა $s \in (t_0, t_0 + \tau_i)$ მაშინ $\lambda_i(t)$ -ს ექნება კვლავ (3.3) სახე. მივიღებთ

$$\gamma_{i2} = \int_{t_0}^{t_0+\tau_i} |\lambda_i(s)| ds < \int_{t_0}^{t_0+\tau_0} |f(s, \psi_i(s), \varphi(s-\tau_i), u_i(s)) - f(s, \psi_0(s), \varphi(s-\tau_0), u_i(s))| ds \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$$

ამრიგად (3.4) ტოლობა სამართლიანია ყველა შემთხვევაში. შემდეგ, $|\lambda_i(s)|$ შემოსაზღვრულია ამიტომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{2i} = 0. \quad (3.5)$$

ახლა გარდავქმნათ λ_{3i} : ვთქვათ $s_{i2} = t_0 + \tau_i > t_0 + \tau_0$, თუ $s > t_0 + \tau_i$ მაშინ $s - \tau_i > t_0, s - \tau_0 > t_0$. მივიღებთ

$$\lambda_{3i} = \int_{t_0+\tau_i}^{t_1} |f(s, \psi_i(s), \psi_i(s-\tau_i), u_i(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_0(s-\tau_0), u_i(s))| ds.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $t_0 + \tau_0 - \tau_i > t_0 - \delta$. ცხადია რომ თუ $s > t_0 + \tau_0$ მაშინ $s - \tau_i > t_0 - \delta$ და $s - \tau_0 > t_0 - \delta$ აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lambda_{3i} \leq \int_{t_0+\tau_0}^{t_1} |f(s, \psi_i(s), \psi_i(s-\tau_i), u_i(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_0(s-\tau_0), u_i(s))| ds.$$

გვაქვს,

$$\psi_i(s-\tau_i) - \psi_0(s-\tau_0) = \psi_i(s-\tau_i) - \psi_i(s-\tau_0) + \psi_i(s-\tau_0) - \psi_0(s-\tau_0)$$

$$= \int_{s-\tau_i}^{s-\tau_0} \dot{\psi}_i(\xi) d\xi + \psi_i(s-\tau_i) - \psi_0(s-\tau_0) \rightarrow 0 \text{ როცა } i \rightarrow \infty.$$

ამ შემთხვევაში $\lambda_{3i} \rightarrow 0$. ვთქვათ $s_{i2} = t_0 + \tau_0 > t_0 + \tau_i$, თუ $s > t_0 + \tau_0$ მაშინ $s - \tau_i > t_0 + \tau_i - \tau_0 = t_0$. $s - \tau_0 > t_0 + \tau_0 - \tau_0 = t_0$, მივიღებთ

$$\gamma_{3i} = \int_{t_0+\tau_0}^{t_1} |f(s, \psi_i(s), \psi_i(s-\tau_i), u_i(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_0(s-\tau_0), u_i(s))| ds \rightarrow 0.$$

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში $\gamma_{3i} \rightarrow 0$. (3.4) -(3.5) პირობებისა და უკანასკნელის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $\lambda_i(t) \rightarrow 0$ თანაბრად $t \in [t_0, t_1]$.
გადავიდეთ ზღვარზე (3.2)-ში მივიღებთ

$$x_0(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \dot{x}_0(s - \sigma_0) ds + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_i(s)) ds, \quad (3.6)$$

სადაც

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ \psi_0(t), & t \in [t_0, t_1], \end{cases}$$

ხოლო $\dot{x}_0(t) = \zeta(t)$, $t \in [\hat{\tau}, t_0)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P(s) = \{f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u) : u \in U\}, \quad p_i(s) = f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_i(s)).$$

ცხადია, რომ

$$p_i(\cdot) \in L_1([t_0, \theta_0], R_x^n), \quad p_i(s) \in P(s).$$

$p_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბრად-შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგან შეიძლება გამოვღოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა (იხ.ლემა 2.5), რომელსაც კვლავ აღვნიშნავთ $p_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$ ამრიგად

$$p_i(s) \rightarrow p(s) \text{ სუსტად } [t_0, \theta_0] \text{-ზე.}$$

თეორემა 2.4 თანახმად $p(s) \in P(s)$ და არსებობს $u_0(\cdot) \in \Omega$ ისეთი რომ

$$p(s) = f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_0(s)), \quad s \in [t_0, \theta_0].$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით (3.6) -დან მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 x_0(s) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \dot{x}_0(s - \sigma_0) ds + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t p_i(s) ds \\
 &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \dot{x}_0(s - \sigma_0) ds + \int_{t_0}^t p(s) ds \\
 &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t [A(s) \dot{x}_0(s - \sigma_0) + f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0))] ds.
 \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), x_0(t - \tau_0), u_0(t)), t \in [t_0, \theta_0], \\ x_0(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0], \\ \dot{x}_0(t) = \varsigma(t), t \in [\hat{\tau}, t_0]. \end{cases}$$

ცხადია, $w_0 = (\tau_0, \sigma_0, u_0(\cdot)) \in W$ და მისი შესაბამისი ამონახსნი არის $x_0(t)$, $t \in [\hat{\tau}, t_1]$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $w_0 \in W_0$ და იგი ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $w_i \in W_0$ ამიტომ შესაბამისი ამონახსნი $x_0(t)$ აკმაყოფილებს პირობებს :

$$\rho(t, x_i(t)) \geq 0, t \in [t_0, t_1], \quad \Phi(x_i(t_1)) = 0.$$

გადავიდეთ ზღვარზე მივიღებთ

$$\rho(t, x_0(t)) \geq 0, t \in [t_0, t_1], \quad \Phi(x_0(t_1)) = 0.$$

$w_0 \in W_0$ ე. ი. იგი არის დასაშვები.

$$\hat{\zeta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(w_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(\tau_i, \sigma_i, x_i(t_1)) = \zeta(\tau_0, \sigma_0, x_0(t_1)).$$

ამრიგად , w_0 ანიჭებს ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას ე. ი. იგი არის ამოცანის ამონახსნი.

§ 4 თეორემა 1.2-1.4 დამტკიცება

თეორემა 1.2-ის დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ თეორემა 1.1 -ის 1.3 პირობის მართებულობა, ცხადია რომ დანარჩენი პირობების შესრულება უზრუნველყოფილია. ადვილი საჩვენებელია, რომ 1.3 პირობა გამომდინარეობს 1.5 პირობიდან. მართლაც, ვთქვათ $z_1, z_2 \in P_1(t, x_1, x_2)$ ნებისმიერი წერტილებია. $P_1(t, x_1, x_2)$ სიმრავლის განმარტების ძალით არსებობენ წერტილები $u_1, u_2 \in U$ ისეთი რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$z_1 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u_1, \quad z_2 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u_2.$$

ნებისმიერი $\lambda \in [0, 1]$ გვაქვს

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2].$$

U სიმრავლის ამოზნექილობის გამო დავასკვნით, რომ $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in U$. ამრიგად,

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u_3 \in P_1(t, x_1, x_2),$$

ე. ი. სიმრავლე $P_1(t, x_1, x_2)$ ამოზნექილია. ანალოგიურად მტკიცდება $P_2(t, y_1, y_2)$ სიმრავლის ამოზნექილობა. თეორემა 1.1-ის ყველა მოთხოვნა შესრულებული, ამიტომ ამონახსნის არსებობა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.3-ის დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ თეორემა 1.2 -ის 1.6 პირობის მართებულობა, ცხადია რომ დანარჩენი პირობები შესრულებულია. ამისათვის გამოვიყენოთ კოშის ფორმულა (იხ. თეორემა 2.1). ჩვენს შემთხვევაში გვექნება შემდეგი კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\dot{x}(t - \sigma) + A_1(t)x(t) + B_1(t)x(t - \tau) + C_1(t)u(t), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [\hat{t}, t_0], \quad x(t) = \varsigma(t), & t \in [\hat{t}, t_0]. \end{cases}$$

კოშის ფორმულის ძალით გვექნება

$$\begin{aligned}
x(t; \tau, \sigma) = & \Phi(t_0; t, \tau, \sigma) \varphi(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau, \sigma) B_1(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0 - \sigma}^t Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma) \zeta(s) ds \\
& + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau, \sigma) C_1(s) u(s) ds
\end{aligned}$$

სადაც $\Phi(s; t, \tau, \sigma)$, $Y(s; t, \tau, \sigma)$ არის მატრიც-ფუნქციები განზომილებით $n \times n$, ისინი აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას წინმსწრები არგუმენტით

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s; t, \tau, \sigma) = -Y(s; t, \tau, \sigma) B(s) - Y(s + \tau; t, \tau, \sigma) C(s + \tau), s \in [t_0, t], \\ Y(s; t, \tau, \sigma) = \Phi(s; t, \tau, \sigma) + Y(s + \sigma; t, \tau, \sigma) A(s + \sigma), s \in [t_0, t] \end{cases}$$

და პირობას

$$\Phi(s; t, \tau, \sigma) = Y(s; t, \tau, \sigma) = \begin{cases} E, s = t, \\ \Theta, s > t, \end{cases}$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო Θ ნულოვანი მატრიცა.

U სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს რიცხვები $\alpha > 0$ ისეთი რომ

$$\|u\| = \sup \{ |u(t)| : t \in I \} \leq \alpha, \forall u(\cdot) \in \Omega.$$

შევაფასოთ $\|x\|(\hat{\tau}) = \sup \{ |x(t)| : t \in [\hat{\tau}, t_1] \}$. ცხადია, რომ

$$\|x\|(\hat{\tau}) \leq \|\varphi\| + \|x\|(t_0) \leq \|\varphi\| + \|\Phi\| \|\varphi(t_0)\| + \|Y\| \|B_1\| \|\varphi\| d_1 + \|Y\| \|A\| \|\zeta\| h_1 + \|Y\| \|C_1\| \alpha(t_1 - t_0) = \alpha_1$$

(იხ. თეორემა 2.2), სადაც

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| = \sup \{ |\varphi(t)| : t \in [\hat{\tau}, b] \}, \quad \|\zeta\| = \sup \{ |\zeta(t)| : t \in [\hat{\tau}, b] \}; \\
\|Y\| = \sup \{ \|Y(s; t, \tau, \sigma)\| : (s, t, \tau, \sigma) \in \Pi \}, \quad \|\Phi\| = \sup \{ \|\Phi(s; t, \tau, \sigma)\| : (s, t, \tau, \sigma) \in \Pi \};
\end{aligned}$$

$$\|B_1\| = \{B_1 : t \in [t_0, t_1]\}, \quad \|A\| = \{A : t \in [t_0, t_1]\}, \quad \|C_1\| = \{C_1 : t \in [t_0, t_1]\}.$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში K_1 როლში შეიძლება ავიღოთ სიმრავლე $\{x \in R_x^n : \|x\| \leq \alpha_1\}$.

თეორემა 1.2-ის ყველა პირობა შესრულებულია. აქედან გამომდინარე ამონახსნი არსებობს.

თეორემა 1.4-ის დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x^0(t) = \int_{t_0}^t [a^0(s)\dot{x}(s-\sigma) + f^0(s, x(s), x(s-\tau), u(s))]ds$$

$$\hat{x}(t) = (x^0(t), x(t))^T, \quad \hat{A}(t) = (a^0(s) \ A(s))^T, \quad F = (f^0, f)^T.$$

ამ აღნიშვნებში ამოცანა ინტეგრალური ფუნქციონალით შეიძლება ასე ჩაიწეროს :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \hat{A}(t)\dot{\hat{x}}(t-\sigma) + F(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\tau), u(t)), t \in [t_0, t_1], \\ \hat{x}(t) &= (0, \varphi(t))^T, \quad t \in [\hat{\tau}, t_0], \quad \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = (0, \zeta(t)), t \in [\hat{\tau}, t_0], \end{aligned}$$

$$\rho(t, x(t)) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \Phi(x(t_1)) = 0,$$

$$x^0(t_1) \rightarrow \min.$$

ეს ამოცანა არის (1.1)-(1.5) ამოცანის კერძო შემთხვევა, რომლისთვის შესრულებულია თეორემა 1.1 -ის პირობები. ამრიგად, ამონახსნის არსებობს.

დასკვნა

კვაზიწრფივი ნეიტრალური ოპტიმალური ამაცანისთვის მუდმივი დაგვიანებებით, ფაზური შეზღუდვებით, ზოგადი და ინტეგრალური ფუნქციონალით დამტკიცებულია ოპტიმალური დაგვიანებების და ზომად ფუნქციათა კლასში ოპტიმალური მართვის არსებობა. ძირითადი შედეგი დაკონკრეტებულია წრფივი და არსებითად-წრფივი ნეიტრალური ამოცანებისთვის.

ლიტერატურა

1. G. F. Kamenskii and E. D. Khvilton, "Necessary optimality conditions for neutral systems with deviated argument," *Avtomat. Telemekh.*, No. 3, 20–32 (1969).
2. R. Gabasov and F. Kirillova, The qualitative theory of optimal processes. (Russian) Monographs in Theoretical Foundations of Technical Cybernetics. *Izdat. "Nauka", Moscow*, 1971.
3. B. Sh. Mordukhovich, *Approximation Methods in Optimization and Control Problems* [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
4. T. A. Tadumadze, "Maximum principle for certain control systems of neutral type," *Seminar Inst. Prikl. Mat.*, 9, 9–13 (1974).
5. N. Gorgodze, "Necessary conditions of optimality in neutral type optimal problems with non-fixed initial moment," *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 19, 150–153 (2000).
6. T. Tadumadze, "On the existence of a solution in neutral optimal problems. (Russian) *Soobshch. Akad. Nauk GSSR*, 97, 1 (1980), 33–36.
7. T. Tadumadze, A. Nachaoui, "On the existence of an optimal element in quasi-linear neutral optimal problem. *Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.*, 40(2014), 50–67.
8. Nino Burjanadze, Salome Chachanidze, "On the existence of solutions of some classes neutral and delay two-stage optimal problems," *XXXIV International Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhisvili Tbilisi State University, Book of Abstracts*, Tbilisi, 2020, p. 59.
9. Variation formulas of a solution and initial data optimization problems for quasi-linear neutral functional differential equations with discontinuous initial condition. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 63(2014), 1–77, (with Gorgodze N.).
10. I. Ekeland, R. Temam, Convex analysis and variational problems, *North-Holland*, Amsterdam, 1976.