

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი



შერეული ამოცანები სიმის რხევის არაერთგვაროვანი
განტოლებისათვის

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

მაგისტრანტი: ეკატერინე ბარათაშვილი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ოთარ ჯოხაძე, ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი

თბილისი

2020
სარჩევი

ანოტაცია (ქართულ და ინგლისურ ენაზე)	3
1.1. სიმის თავისუფალი რხევის განტოლება.	5
1.2. ამონახსნის ინტერპრეტაცია.	11
1.3. თავისუფალი რხევების წარმოდგენა, როგორც მდგარი ტალღის სუპერპოზიცია.....	15
1.4. პირველი ზოგადი სასაზღვრო ამოცანა.....	19
1.5 ამოცანა სასრული სეგმენტისათვის.	21
1.6 გრინის ფორმულები	25
1. 7 (1.1)-(1.4) ამოცანის წარმოდგენა სასრულო ჯამის სახით	29
 დასკვნა	 34
 ლიტერატურა.	 35

ანოტაცია

სიმის რხევის არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის ასგეირსონის პრინციპისა და კლასიკური კოშის, დარბუსა და გურსას ამოცანების ცხადი სახით ამონახსნების გამოყენებით მიღებულია შერეული ამოცანის ამონახსნი ეფექტურად სასრულო ჯამის სახით.

Summary

Using Asgeirsson's principle and analytic solutions of the classic Cauchy, Darboux and Goursat problems, the solution of mixed problem for inhomogeneous equation of string vibration was written as an effectively finite sum.

შერეული ამოცანები სიმის რხევის არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის

ვთქვათ, x და t დამოუკიდებელი ცვლადებია. $D_\infty : 0 < x < l, t > 0$ არეში განვიხილოთ შემდეგი წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა

$$\square u = f(x, t), \quad (x, t) \in D_\infty \quad (1.1)$$

ვეძებთ მისი ამონახსნი $u(x, t)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

და სასაზღვრო პირობებს

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

სადაც $f, \varphi, \psi, \mu_1, \mu_2$ მოცემული, ხოლო u საძიებელი უცნობი ფუნქციაა;

$\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ადვილია ჩვენება, თუ (1.1) განტოლების მარჯვენა მხარე, (1.2) საწყისი

და (1.3), (1.4) სასაზღვრო მონაცემები აკმაყოფილებენ სიგლუვის პირობებს

$$f \in C^1(\overline{D_\infty}), \quad \varphi \in C^2([0, l]), \quad \psi \in C^1([0, l]), \quad \mu_i \in C^2([0, \infty]), \quad i = 1, 2$$

მაშინ (1.1) – (1.4) ამოცანის ამოხსნისათვის $C^2(\overline{D_\infty})$ კლასში აუცილებელია შემდეგი

მეორე რიგის შეთანხმების პირობები

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \psi(0) = \mu_1'(0), \quad \mu_1''(0) - \varphi''(0) = f(0, 0)$$

$$\varphi(l) = \mu_2(0), \quad \psi(l) = \mu_2'(0), \quad \mu_2''(0) - \varphi''(l) = f(l, 0).$$

1.1 სიმის თავისუფალი რხევის განტოლება.

ცვლადთა განცალების მეთოდი, ან იგივე ფურიეს მეთოდი, ყველაზე ხშირად გამოყენებადია კერძო წარმოებულნი განტოლებების ამოხსნისას. ამ მეთოდს ჩვენ გამოვიყენებთ რხევის ამოცანისას სიმის ორივე ბოლოზე.

ვეძებთ შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1)$$

რომელიც აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2)$$

და საწყის პირობებს

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(1)-განტოლება არის წრფივი და ერთგვაროვანი, ასე რომ ამონახსნების ჯამიც არის ამოცანის ამონახსნი. თუ არის ამოცანის ამონახსნების საკმარისად დიდი რიცხვი, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ამონახსნი ჯამის დახმარებით კოეფიციენტების შემცველობით.

ავიღოთ ძირითადი დამხმარე ამოცანა

ვეძებთ ამოცანის ამონახსნი

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

რომელიც არ არის ნულის ტოლი და აკმაყოფილებს შემდეგ ერთგვაროვან სასაზღვრო

$$\text{პირობებს } u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (4)$$

და შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ნამრავლის ფორმით

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

სადაც $X(x)$ არის მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია და $T(t)$ არის მხოლოდ t ცვლადის

ფუნქცია.

ჩავსვით (4) -ს ამონახსნი (1) განტოლებაში

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

ან შემდეგ XT -ზე გაყოფა

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \quad (6)$$

იმისათვის, რომ (4) ფორმულა იყოს (1)-განტოლების ამონახსნი, (5) და (6) უნდა

აკმაყოფილებდეს იგივეურობას, ე.ი ყველა დამოუკიდებელი ცვლადის

მნიშვნელობისათვის $0 < x < l, t > 0$. (6) განტოლების მარჯვენა მხარე არის მხოლოდ

t ცვლადის ფუნქცია, ხოლო მარცხენა მხარე მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია.

დავაფიქროთ, მაგალითად, X -ის ზოგიერთი მნიშვნელობა და t -ს ცვლილება (ან

საპირისპირო) მივიღებთ, რომ (6) განტოლების მარჯვენა და მარცხენა მხარე, როცა

არგუმენტი არის შეცვლილი, რჩება მუდმივი

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda \quad (7)$$

სადაც λ არის მუდმივი, რომელიც შეიძლება იყოს დადებითი ან უარყოფითი, ამიტომ

ჩვენ მოხერხებულობისათვის ავლოტ მინუსი ნიშნით.

(7)- თანაფარდობიდან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებებს $X(x)$ და $T(t)$

ფუნქციებისთვის

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (8)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (9)$$

სასაზღვრო პირობები (2) გვაძლევს

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

საიდანაც $X(x)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს სასაზღვრო პირობებს

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (10)$$

სხვაგვარად გვექნება $T(t) \equiv 0$ ან $u(x, t) \equiv 0$.

და ჩვენ უნდა ვეძებოთ არატრივიალური ამონახსნი. $T(t)$ ფუნქციისათვის მთავარ დამხმარე ამოცანაში არ არის დამატებითი პირობა.

ასეთი შემთხვევით, $X(x)$ ფუნქციის განსაზღვრებით მივდივართ უმარტივეს საკუთრივი მნიშვნელობის ამოცანამდე :

ვიპოვოთ λ -ს მნიშვნელობა, საკუთრივი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს არატრივიალური ამონახსნი

$$X'' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (11)$$

და აგრეთვე, ვიპოვოთ ეს ამონახსნი. ამ ამოცანას ეწოდება შტურმ-ლიუვილის ამოცანა.

ჩვენ განვიხილავთ განცალკეულ შემთხვევას, როცა პარამეტრი λ არის დადებითი, უარყოფითი და ნული.

1. როცა $\lambda < 0$ ამოცანას არ აქვს არატრივიალური ამონახსნი. (8) განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

სასაზღვრო პირობები გვაძლევს :

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^a + C_2 e^{-a} = 0 \quad \text{სადაც} \quad a = l\sqrt{-\lambda}$$

$$\text{ე.ი.} \quad C_1 = -C_2 \quad \text{და} \quad C_1(e^a - e^{-a}) = 0$$

მაგრამ ამ შემთხვევაში განვიხილოთ, რომ a არის ნამდვილი და დადებითი, ასე

რომ $(e^a - e^{-a}) \neq 0$. ამიტომ $C_1 = 0$ და $C_2 = 0$ და თანმიმდევრულა

$$X(x) \equiv 0.$$

2. როცა $\lambda = 0$ არ არსებობს არატრივიალური ამონახსნი. ამ შემთხვევაში განტოლების აზოგადი ამონახსნი არის

$$X(x) = ax + b.$$

სასაზღვრო პირობები გვამღებს

$$X(0) = [ax + b]_{x=0} = b = 0,$$

$$X(l) = al = 0.$$

ე.ი $a = 0$, $b = 0$ და $X(x) \equiv 0$.

3. როცა $\lambda > 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს წარმოსახვით ხარისხს და შესაბამისად დავწერთ როგორც

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

სასაზღვრო პირობები გვამღებს

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

თუ $X(x)$ არ არის იგივეურად 0-ის ტოლი, $D_2 \neq 0$ ამიტომ

$$\sin \sqrt{\lambda}l = 0 \quad \text{ან} \quad \sqrt{\lambda} = \pi \frac{n}{l} \quad (12)$$

სადაც n არის მთელი რიცხვი. აქედან გამომდინარე, ამოცანის არატრივიალური ამონახსნები არიან მხოლოდ მნიშვნელობისთვის

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$$

ამ საკუთრივ მნიშვნელობას შეესაბამება საკუთრივი ფუნქცია

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ამრიგად, მხოლოდ λ -ს მნიშვნელობისათვის

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad (13)$$

აქ არატრივიალური ამონახსნები

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

λ_n -ის მნიშვნელობებს შეესაბამება (9) განტოლების ამონახსნი

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (15)$$

სადაც A_n და B_n არის განსაზღვრული კოეფიციენტები.

(1)-(3) ამოცანებს დავუბრუნდეთ, დავინახავთ, რომ ფუნქციები

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (16)$$

(1)-განტოლების კერძო ამონახსნი აკმაყოფილებს (2) სასაზღვრო პირობებს, რომელიც წარმოდგინდება (4) ორი ფუნქციის ნამრავლის ფორმით, სადაც ერთი მათგანი დამოკიდებულია მხოლოდ x -ზე, ხოლო მეორე t -ზე. ამონახსნი აკმაყოფილებს ჩვენი საწყისი ამოცანის საწყის (3) პირობებს, მხოლოდ საწყისი $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ საწყისი ფუნქციების კერძო შემთხვევისთვის.

ახლა ჩვენ ვეძებთ ამოცანის ამონახსნს ზოგადი შემთხვევისათვის, რადგან (1) განტოლების წრფივობისა და ერთგვაროვნების ძალით კერძო ამონახსნების ჯამი

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს ამ განტოლებებსა და სასაზღვრო (2) პირობებს. საწყისი პირობები გვაძლევს

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ფურიეს მწკრივების თეორიიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი თანაბრად უწყვეტი და თანაბრად დიფერენცირებადი ფუნქცია $f(x)$, მოცემული $0 \leq x \leq l$ ინტერვალში, შეიძლება გავშალოთ ფურიეს მწკრივებში

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (19)$$

სადაც

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (20)$$

თუ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს ფურიეს მწკრივების გაშლის პირობებს, მაშინ

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (22)$$

ასეთი მწკრივების შედარება (18) ფორმულასთან გვაჩვენებს, რომ საწყისი პირობების შესრულებისათვის უნდა ავიღოთ

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{\pi n a} \psi_n. \quad (23)$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს (17) ფუნქციას სრულად და გვაძლევს ამოცანის ამონახსნს. ჩვენ გვაქვს განსაზღვრული ამონახსნი უსასრულო მწკრივების ფორმაში. თუ (17)-ფუნქცია განშლადია ან ფუნქცია განსაზღვრული ამ მწკრივების მიერ არ არის დიფერენცირებადი, მაშინ არ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ იგი ჩვენი დიფერენციალური

განტოლების ამონახსნის სახით.

1.2. ამონახსნის ინტერპრეტაცია

ავიღოთ მიღებული ამონახსნის ინტერპრეტაციას. ფუნქცია $u_n(x, t)$ შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= a_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned} \quad (24)$$

სადაც

$$a_n = \sqrt{(A_n^2 + B_n^2)}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\arctan \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

ყოველ წერტილში x_0 სიმი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას

$$u_n(x_0, t) = a_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

ამპლიტუდით

$$a_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

მოდულის ამ სახეობას ეწოდება *მდგარი ტალღა*. წერტილები

$$x = m \left(\frac{l}{n} \right) (m = 1, 2, \dots, n-1), \text{ რომელშიც } \sin \frac{\pi n}{l} x = 0, \text{ მთელი პროცესის}$$

განმავლობაში რჩებიან სტაციონალურები და მათ ეწოდებათ $u_n(x, t)$ მდგარი ტალღის

კვანძები. წერტილები $x = \frac{(2m+1)l}{2n} (m = 1, 2, \dots, n-1)$, რომელშიც

$$\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1, \text{ რხევა } a_n \text{ მაქსიმალური ამპლიტუდის სიძლიერის და ეწოდება მდგარი}$$

ტალღის ანტინოდები. მდგარი ტალღის სახე დროის ნებისმიერ მომენტში წარმოადგენს

სინუსოიდას

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

სადაც
$$C_n(t) = a_n \cos \omega_n(t + \delta_n), \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

t მომენტში, როცა $\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$ გადაადგილება მიაღწევს მაქსიმუმს, სიჩქარე იქნება ნულის ტოლი. t მომენტში, როცა $\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$ გადაადგილება არის ნული და სიჩქარე არის მაქსიმალური. რხევის სიხშირე სიმის ყოველი წერტილის არის იდენტური და ტოლია

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \quad (26)$$

ω_n სიხშირეს ეწოდება საკუთრივი სიხშირე. სიმის განივი რხევისათვის $a^2 = \frac{T}{\rho}$,

მაშასადამე

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (27)$$

n_{th} მდგარი ტალღის ენერგია (n_{th} ჰარმონიულია) სიმის განივი რხევის შემთხვევისთვის არის

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{a_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 + \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + \right. \\ &\quad \left. + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

მაშინ

$$\int_0^t \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^t \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{1}{2}.$$

გამოსახულებების გამოყენებით a_n , ω_n და $T = a^2 \rho$ განტოლებისათვის მივიღებთ

$$E_n = \frac{\rho a_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \quad (29)$$

სადაც $M = l\rho$ არის სიმის მასა.

სიმის რხევას აღმოვაჩნეთ გამოსხივებული ხმით. ტონის სიმაღლე დამოკიდებულია რხევის სიხშირეზე. ტონის სიძლიერე განისაზღვრება ენერგიის მიერ, და მაშასადამე, ამპლიტუდით. ყველაზე დაბალი ტონი, რომელიც შეიძლება შექმნას სიმმა,

განსაზღვრულია ყველაზე დაბალი საკუთრივი სიხშირით $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ და მას ეწოდება

ფუნდამენტალური ტონი. დანარჩენი ტონები სიხშირით, რომლებიც არიან ω_1 -ის

ჯერადები ეწოდებათ ოვერტონი.

სიმის ყველაზე დაბალი ტონი და მისი ტემბრი არის დამოკიდებული რხევის აგზნების მეთოდზე, რომელიც განსაზღვრავს საწყისი პირობები

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x);$$

და აგრეთვე კოეფიციენტები A_n და B_n . თუ $A_n = B_n = 0$, მაშინ ყველაზე დაბალი

ტონი იქნება ω_n სიხშირის შესაბამისი, სადაც n არის უმცირესი რიცხვი, რომლისთვისაც

A_n ან B_n არიან ნულისაგან განსხვავებული.

ჩვეულებრივ სიმი ერთსა და იგივე ტონს გამოსცემს. ნამდვილად, შევქმნათ სიმის რხევა ერთ მხარეზე გადაყვანით და გავათავისუფლოთ სასწყისი სიჩქარის გარეშე. ამ შემთხვევაში

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

და

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi d\xi > 0, \quad \sin \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

შემდეგი კოეფიციენტები, არიან მნიშვნელოვნად მცირე ვიდრე A_1 , როგორც ფუნქცია

$\sin \frac{\pi}{l} \xi$ ნიშანცვლილი $n \geq 2$ -სთვის. კონკრეტულად, თუ $\varphi(x)$ არის სიმეტრიული

ცენტრის მიმართ, $A_2 = 0$. მაშასადამე, თუ სიმის რხევა არის წარმოქმნილი ერთ მხარეს, მაშინ უმცირეს ტონს ჩვეულებრივ ენერგია უფრო დიდი აქვს, ვიდრე სხვა ჰარმონიული ენერგია. სიმის რხევა შეგვიძლია შევქმნათ სხვა გზითაც. მაგალითად, თუ საწყისი ფუნქცია არის კენტი, სიმის ცენტრის მიმართ, მაშინ

$$A_1 = 0$$

და უმცირესი ტონი შესაბამისი სიხშირის

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

თუ ჟღერადობის სიმს შევხებით ზუსტად ცენტრში, მისი ჟღერადობა უცებ შეიცვლება და ჟღერადობა ფუნდამენტალური ტონის ზემოთ ასრებულ ოქტავას ჰგავს. ამ მეთოდს ტონების განსხვავებისათვის ხშირად იყენებენ ვიოლიონზე, გიტარაზე ან სხვა რომელიმე სიმებიანი ინსტრუმენტზე დაკვრისათვის. სიმის ცენტრზე შეხების მომენტში, ჩვენ ვაჩერებთ მდგარ ტალღას არსებული ანტინოდი წერტილში და ნარჩუნდება მხოლოდ ჰარმონიული საკვანძო წერტილები. მაშინ მხოლოდ კენტი ჰარმონიულობა დარჩება და უმცირესი სიხშირე იქნება

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

თუ სიმს შევხებით მის $1/3$ მისი სიგრძის ბოლოებიდან, მაშინ მისი ფუნდამენტური

ტონი გაიზრდება სამჯერ, ხოლო მისი ჰარმონიულობა საკვანძო წერტილში $x = \frac{l}{3}$

უცვლელი დარჩება.

ფორმულები

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{და} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}},$$

სიხშირის განსაზღვრა და ,შესაბამისად, ფუნდამენტალური რხევის პერიოდი, პირველად ეს კანონები განიმარტა ექსპერიმენტულად. (მერსენის კანონები).

1.3 თავისუფალი რხევების წარმოდგენა, როგორც მდგარი ტალღის სუპერპოზიცია.

აქ წარმოდგენილია ოფიციალური სქემა, რომ თვითნებური რხევები წარმოდგენილია ,როგორც მდგარი ტალღების უსასულო ჯამი. დავასაბუთებთ ფორმალურ ამონახსნს, მაგალითად , ჩვენ განვიხილავთ სუპერპოზიციის პრინციპის განზოგადებას, რომელიც ცნობილია სასრული ჯამის სახით, უსასრულო მწკრივის შემთხვევაში.

L იყოს წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი ისე, რომ $L(u)$ იყოს u ფუნქციის (ჩვეულებრივი ან ნაწილობრივი) წარმოებულების ჯამის ტოლი კოეფიციენტებით, რომლებიც არიან ფუნქციების დამოუკიდებელი ცვლადები.

დავამტკიცოთ ლემა (სუპერპოზიციის განზოგადებული პრინციპი)

თუ ფუნქციები $u_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ არიან $L(u) = 0$ წრფივი და ერთგვაროვანი

დიფერენციალური განტოლებების კერძო ამონახსნები, მაშინ $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ მწკრივი არის

აგრეთვე განტოლების ამონახსნი, თუ $L(u) = 0$ განტოლებაში წარმოდგენილი u -ს წარმოებულების დათვლა შეიძლება განხორციელდეს წევრობრივი დიფერენცირებით.

თუ u -ს წარმოებულები , წარმოდგენილი $L(u) = 0$ განტოლებაში, არის დათვლადი წევრობრივ დიფერენცირებადი, მაშინ განტოლების წრფივობის გამო

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

ეს ამტკიცებს, რომ u ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას. როგორც საკმარის პირობებს წევრობრივ დიფერენცირებადი შესაძლებლობისათვის, ჩვენ მუდმივად გამოვიყენებთ ერთგვაროვანი კრებადი მწკრივის პირობებს

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\partial^n u_i}{\partial x^m \partial t^{n-m}},$$

მიღებული დიფერენცირებადობის შემდეგ.

დავუბრუნდეთ ჩვენს სასაზღვრო ამოცანას. პირველ რიგში, შევამოწმოთ ფუნქციის უწყვეტობა

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (30)$$

$u(x, t)$ არის უწყვეტად დაკავშირებული თავის საწყის და სასაზღვრო მნიშვნელობებთან. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ერთგვაროვანი კრებადი მწკრივი $u(x, t)$ -სთვის, როგორც ასეთი საერთო წევრი მწკრივების არის უწყვეტი ფუნქციები, ხოლო უწყვეტი ფუნქციების ერთგვაროვნად კრებადი მწკრივები განსაზღვრავს უწყვეტ ფუნქციებს. გამოვიყენოთ შემდეგი უტოლობა

$$|u(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|,$$

მაშინ გამოვიტანთ დასკვას, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (31)$$

არის მაჟორანტი (30)-მწკრივისათვის. თუ (31) მაჟორანტი მწკრივი არის კრებადი, მაშინ (30) არის ერთგვაროვნად კრებადი მწკრივი. ე.ი. $u(x, t)$ ფუნქცია არის უწყვეტი.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $u_t(x, t)$ უწყვეტად მიერთებულია თავის საწყის მნიშვნელობებს, უნდა ვაჩვენოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობა, ამისათვის კი საკმარისია დავამტკიცოთ ერთგვაროვანი კრებადი მწკრივი

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (32)$$

ან მაქორანტი მწკრივის კრებადობა

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|). \quad (33)$$

საბოლოოდ , რომ დავამტკიცოთ $u(x, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას, ე.ი სუპერპოზიციის განზოგადების პრინციპი არის მისაღები, საკმარისია დავამტკიცოთ

თ, რომ შესაძლებელია ორჯერ წევრობრივ დიფერენცირება $u(x, t)$ -სთვის. ამისათვის, დაკმარისია დავამტკიცოთ ერთგვაროვანი კრებადი მწკრივი

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

რომელსაც აქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|)$$

როგორც მაქორანტი მწკრივები გარდა პროპორციულობის კოეფიციენტებისა. მაშინ

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{\pi n a} \psi_n,$$

სადაც

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

ჩვენი ამოცანაა დავამტკიცოთ მწკრივის კრებადობა

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, (k = 0, 1, 2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, (k = -1, 0, 1). \end{aligned} \right\}$$

ჩვენ გამოვიყენებთ უკვე ნაცნობ ფურიეს მწკრივების თვისებას.

თუ $F(x)$ პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით $2l$, აქვს k უწყვეტად წარმოებულები, და $(k+1)$ -ე წარმოებული არის უბან-უბან უწყვეტი, მაშინ რიცხვითი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

არის კრებადი, სადაც a_n და b_n არის ფურიეს კოეფიციენტები. თუ გავშლით $\sin \frac{\pi n}{l}$

მწკრივში მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას, $(0, l)$ ინტერვალში, მაშინ წინასწარი მოთხოვნები უნდა იყოს შესრულებული $F(x)$ ფუნქციისათვის, მიღებული $f(x)$ კენტი გაფართოებისათვის. დეტალურად, $F(x)$ -ის უწყვეტობისათვის საჭიროა $f(0) = 0$, სხვა შემთხვევაში კენტი გაფართოება არის წყვეტილი $x=0$ წერტილებში.

ანალოგიურად, $x=l$ წერტილში იქნება $f(l) = 0$, მაშინ გაფართოებული ფუნქცია

არის უწყვეტი და პერიოდული $2l$ პერიოდით. პირველი რიგის უწყვეტი

წარმოებულისას $x=0$, $x=l$ წერტილებში, ავტომატურად მიიღება კენტი

გაფართოება. ზოგადად, ლუწი უწყვეტი წარმოებულებისათვის, ფუნქციის გაფართოება გვაქვს ასეთი

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0, \quad (k = 0, 2, 4, \dots, 2n)$$

კენტი წარმოებულები ავტომატურად უწყვეტებია.

ამრიგად, კრებადი მწკრივისათვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, (k = 0, 1, 2),$$

ჩვენ მოვითხოვთ, რომ საწყისი გადაადგილება $\varphi(x)$ უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1⁰. ფუნქციის წარმოებულები მეორე რიგის ჩათვლით, უნდა იყოს უწყვეტი, ხოლო მესამე რიგირც წარმოებული უბან-უბან უწყვეტი და ამასთან

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0; .$$

კრებადი მწკრივისათვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, (k = -1, 0, 1$$

შემდეგი პირობა უნდა დაწესდეს საწყის $\psi(x)$ სიჩქარეზე.

2⁰. $\psi(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტად დიფერენცირებადი, აქვს მეორე რიგის უბან-უბან უწყვეტი წარმოებული და ამასთან

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

მაშასადამე, ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $u(x, t)$ რხევა საწყისი

ფუნქციებით $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ აკმაყოფილებენ 1⁰ და 2⁰ მოთხოვნებს, წარმოდგენილს მდგარი ტალღის სუპერპოზიციის ფორმით. 1⁰ და 2⁰ პირობები აღმოჩნდნენ საკმარისი, აქ მიღებული დამტკიცების მეთოდებისათვის.

1.4 პირველი ზოგადი სასაზღვრო ამოცანა.

განვიხილოთ ზოგადი პირველი სასაზღვრო ამოცანა რხევის განტოლებისათვის

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0$$

დამატებითი პირობებით

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t) \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\}, \quad t \geq 0.$$

შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქცია $v(x, t)$, ვარაუდით, რომ

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t)$$

ასე, რომ $v(x, t)$ წარმოადგენს $u(x, t)$ ფუნქციის გადახრას, რომელიც ცნობილი $U(x, t)$ ფუნქციიდან.

ფუნქცია $v(x, t)$ იქნება ამონახსნი შემდეგი ამოცანის

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

დამატებითი პირობებით

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0) \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x), & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x, 0) \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t) \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t) \end{aligned}$$

ავიღოთ დამხმარე ფუნქცია $U(x, t)$ შემდეგი სახით

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \quad \text{ან} \quad \bar{\mu}_2(t) = 0$$

ამისათვის საკმარისია, ავიღოთ

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

ზოგადი სასაზღვრო ამოცანა $u(x, t)$ ფუნქციისათვის შემცირდა სასაზღვრო ამოცანაზე $v(x, t)$ ფუნქციისათვის, ნულოვანი სასაზღვრო პირობებით.

1.5 ამოცანა სასრული სეგმენტისათვის

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა $(0, l)$ სასრული სეგმენტისათვის. უნდა ვეძებოთ შემდეგი ამოცანის ამონახსნი

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

დამაკმაყოფილებელი სასაზღვრო პირობები

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t) \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

და საწყისი პირობები

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

განვიხილოთ ერთგვაროვანი შემთხვევა სასაზღვრო პირობები

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

ვეძებოთ ამოცანის ამონახსნი შემდეგი წარმოდგენის გათვალისწინებით

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(a) da$$

სადაც Φ და Ψ ფუნქციები არის განსაზღვრული. საწყისი პირობებით

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

განსაზღვრავს Φ და Ψ -ის მნიშვნელობას $(0, l)$ ინტერვალში.

რომ დავაკმაყოფილოთ ნულოვანი სასაზღვრო პირობები, მოვდოთ $\Phi(x)$ და $\Psi(x)$

ფუნქციებს კენტობის პირობა $x = 0, x = l$ წერტილებში:

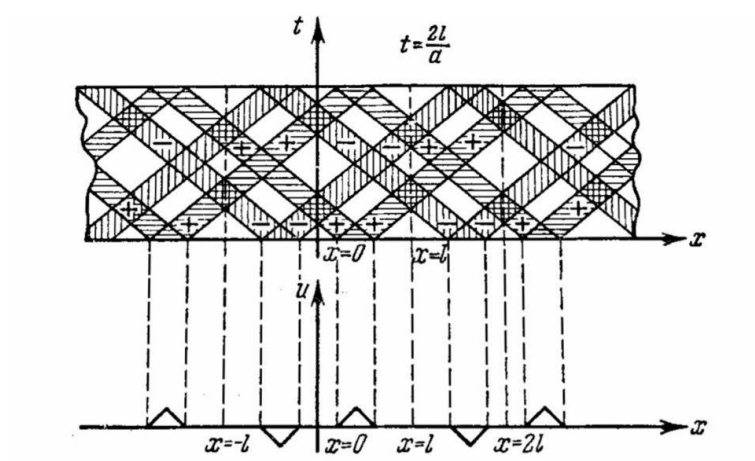
$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l - x)$$

$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l - x)$$

ამ ტოლობების შერწყმით მივიღებთ

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad , \quad x' = -x$$

ანალოგიურად $\Psi(x)$ -სთვის, ე.ი. $\Phi(x)$ და $\Psi(x)$ არიან პერიოდული ფუნქციები $2l$ პერიოდით.



სურ. 1

$\Phi(x)$ და $\Psi(x)$ -ის გაფართოება განისაზღვრება მთელ მიდამოზე $-\infty < x < \infty$.

სურ.1-ზე შერწყმულია ფაზური (x, t) და (x, u) სიბრტყე, რომელშიც მოცემულია საწყისი გადახრა და მისი განგრძობითობა. ფაზური სიბრტყეზე გამოყოფილი ხაზები, რომლის შიგნითაც გადახრა არის ნულისგან განსხვავებული. ხოლო ნიშნები პლუსი და მინუსი ამ ხაზებში გვიჩვენებენ გადახრის ფაზას ტოლფერდა სამკუთხედის სახით.

ამ ნახაზის მიხედვით, ადვილი წარმოსადგენია გადახრის პროფილი ნებისმიერ t

მომენტში. ასე რომ, $t = \frac{2l}{a}$ მომენტში მივიღებთ გადახრას, რომელიც ემთხვევა საწყისს.

ასეთ შემთხვევაში ფუნქცია $u(x, t)$ იქნება პერიოდული ფუნქცია t პერიოდით $T = \frac{2l}{a}$.

განვიხილოთ ამოცანა სასაზღვრო პირობების გავრცელებაზე. ვეძებთ ამოცანის ამონახსნი

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

ნულოვანი საწყისი პირობებით

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

და სასაზღვრო პირობებით

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t) \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} , \quad t > 0.$$

მივიღეთ, რომ, როცა $t < \frac{l}{a}$ შემდეგი ფუნქცია არის ამოხსნადი

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \text{ სადაც } \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

თუმცა ეს ფუნქცია არ აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$u(l, t) = 0, \quad t > \frac{l}{a} \text{ -სთვის.}$$

განვიხილოთ „არეკლილი“ ტალღა, რომელიც მიდის მარცხნივ და $x = l$ -სთვის აქვს

გადახრა, რომელიც ტოლია $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$. მისი ანალიტიკური გამოსახულება მოიცემა

ფორმულით

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორი ტალღის სხვაობა

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

არის განტოლების ამონახსნი $t < \frac{2l}{a}$ -სთვის.

ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ ამონახსნს შემდეგი მწკრივით

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a} \right)$$

რომელიც შეიცავს მხოლოდ საბოლოო ციფრს ნულოვანი წევრისაგან განსხვავებულს,

რადგან ყოველი ახალი ანარეკლით არგუმენტი მცირდება $\frac{2l}{a}$ -ით, ხოლო ფუნქცია

$\bar{\mu}(t) = 0$ -ით $t < 0$ -თვის. სასაზღვრო პირობების შესრულება უშუალოდ მოწმდება.

ავიღოთ $x = 0$ და გამოვყოფთ პირველი ჯამიდან შესაკრებს $n = 0$ -თვის, რომელიც

ტოლია $\mu(t)$. დანარჩენი პირველი და მეორე ჯამის შესაკრებები, n -ის იდენტური

მნიშვნელობის შესაბამისი, ბათილდება. ეს გვიჩვენებს, რომ $u(0, t) = \mu(t)$.

n -ის $(n-1)$ -ით შეცვლით პირველი ჯამი გარდაიქმნება შემდეგი ფორმით

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a} \right)$$

ახლა ავიღოთ $x = l$, უშუალოდ ვრწმუნდებით, რომ პირველისა და მეორეს ჯამის შესაკრებები ერთმანეთის მიმართ ბათილდება. ფუნქცია

$$\bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

წარმოადგენს ტალღას, წარმოქმნილი სასაზღვრო პირობებით $x = 0$ -სთვის. $x = l$

ბოლოების შედეგზე დამოუკიდებელად, თითქოს იყოს უსასრულო სიმი $-\infty < x < \infty$.

შემდეგი შესაკრებები წარმოადგენს ასახვას $x = l$ (მეორე ჯამი) და $x = 0$ (პირველი ჯამი) საზღვრებით.

ანალოგიურად, ფუნქცია

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+l)t}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+l)t}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

გვაძლევს ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს ნულოვანი საწყისი პირობებით

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ და სასაზღვრო პირობებით $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = \mu(t)$.

1.6 გრინის ფორმულები

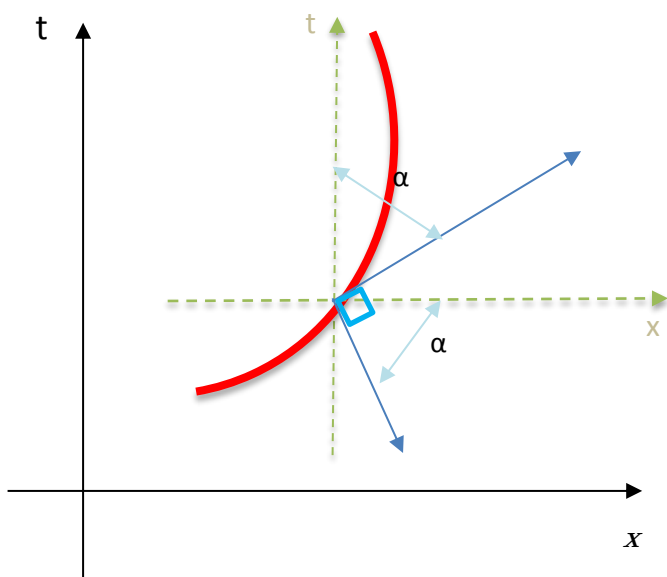
$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$$

ასგეირსონის პრინციპი დავამტკიცოთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t - \frac{\partial}{\partial x} u_x = f \quad \text{ვაინტეგრირებთ მართკუთხედზე და გამოვიყენოთ გრინის}$$

ფორმულები

$$\iint_{\partial D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P v_x + Q v_y) ds = \int_{\partial D} P dy - Q dx$$



$$\vec{v} := (v_x, v_t) \quad , \quad \vec{S} := (S_x, S_t) \quad v_x = \cos \alpha$$

$$v_t = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$S_t = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$S_x = \cos \alpha$$

$$\vec{v} := (v_x, v_t) = (\cos \alpha, -\sin \alpha) = (y'(S), -x'(S))$$

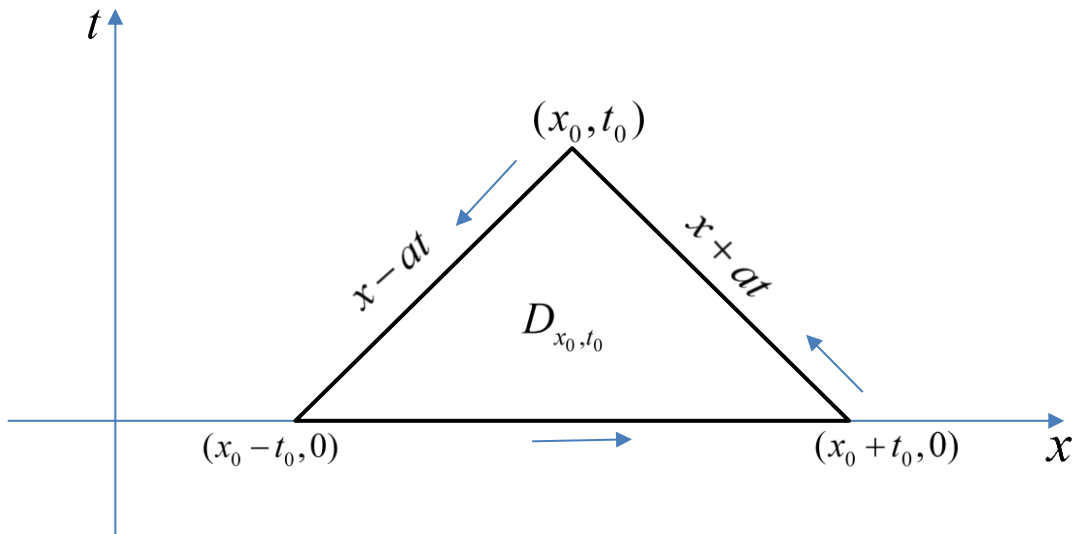
$$\vec{S} := (S_x, S_t) = (\sin \alpha, \cos \alpha) = (x'(S), y'(S)) \quad \vec{v} \perp \vec{S}$$

$$v_x dS = \cos \alpha dS = y'(S) dS = dy$$

$$v_t dS = -\sin \alpha dS = -x'(S) dS = -dx$$

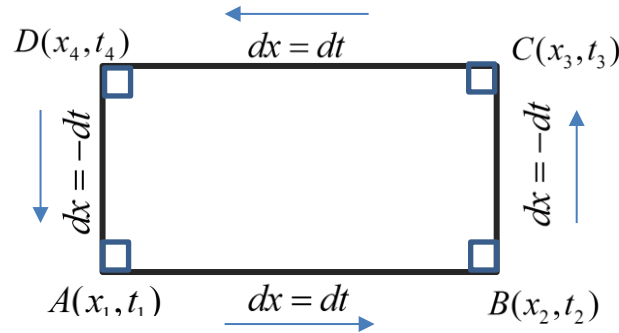
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty, \varphi \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x, 0) = \psi(x, 0) & -\infty < x < \infty, \Psi \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$f \in C^1((-\infty, +\infty) \times (0, +\infty))$$



$$\iint_{D_{x_0, t_0}} f(x, t) dx dt = \iint_{D_{x_0, t_0}} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = \iint_{D_{x_0, t_0}} [(u_t)_t - (a^2 u_x)_x] dx dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial D_{x_0, t_0}} -(u_t dx + a^2 u_x dt) = - \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx + \int_0^{t_0} (au_t - a^2 u_x) dt + \int_0^{t_0} (au_t + a^2 u_x) dt = \\
&= - \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx + a \int_0^{t_0} d_t u(-at + x_0 + at_0, t) dt + a \int_0^{t_0} d_t u(at + x_0 - at_0, t) dt = \\
&= - \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx + au(-at + x_0 + at_0, t) \Big|_{t=0}^{t=t_0} + au(at + x_0 - at_0, t) \Big|_{t=0}^{t=t_0} = \\
&= - \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx + a[u(x_0, t_0) - u(x_0 + at_0, 0)] + \\
&\quad + a[u(x_0, t_0) - u(x_0 - at_0, 0)] = - \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx + a[u(x_0, t_0) - \varphi(x_0 + at_0)] + \\
&\quad a[u(x_0, t_0) - \varphi(x_0 - at_0)] = 2au(x_0, t_0) - a[\varphi(x_0 + at_0) + \varphi(x_0 - at_0)] - \\
&\quad - \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx; \\
u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2} [\varphi(x_0 + at_0) + \varphi(x_0 - at_0)] + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(x) dx + \frac{1}{2a} \iint_{D_{x_0, t_0}} f(x, t) dx dt
\end{aligned}$$



$$(u_t)_t - (u_x)_x = f(x, t)$$

$$\iint_{ABCD} f(x, t) dx dt = \iint_{ABCD} [(u_t)_t - (u_x)_x] dx dt = - \oint_{\partial ABCD} u_t dx + u_x dt$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{AB} u_t dt + u_x dx - \int_{BC} u_t(-dt) + u_x(-dx) - \int_{CD} u_t dt + u_x dx - \int_{DA} u_t(-dt) + u_x(-dx) \\ &= - \int_A^B du + \int_B^C du - \int_C^D du + \int_D^A du = -u(B) + u(A) + u(C) - u(B) - u(D) + u(C) + u(A) - u(D) = \\ &= 2[u(A) + u(C) - u(B) - u(D)]. \end{aligned}$$

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D) + \frac{1}{2} \iint_{ABCD} f(x, t) dx dt \quad (*)$$

$$1. (u_t)_{tt} - (u_t)_{xx} = f_t(x, t), \quad (*) \Rightarrow u_t(A) + u_t(C) = u_t(B) + u_t(D) +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{ABCD} f_t(x, t) dx dt = u_t(B) + u_t(D) + \frac{1}{2} \iint_{ABCD} f_t(x, t) dx dt - \oint_{\partial ABCD} f dx =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} f /_{AB} dt + \int_{t_2}^{t_3} f /_{BC} dt + \int_{t_4}^{t_3} f /_{DC} dt - \int_{t_1}^{t_4} f /_{AD} dt;$$

$$2. (u_x)_{tt} - (u_x)_{xx} = f_x(x, t), \quad (*) \Rightarrow u_x(A) + u_x(C) = u_x(B) + u_x(D) +$$

$$\frac{1}{2} \iint_{ABCD} f_x(x, t) dx dt = u_x(B) + u_x(D) + \frac{1}{2} \iint_{ABCD} f_x(x, t) dx dt + \oint_{\partial ABCD} f dx =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f /_{AB} dt + \int_{t_2}^{t_3} f /_{BC} dt - \int_{t_4}^{t_3} f /_{DC} dt - \int_{t_1}^{t_4} f /_{AD} dt;$$

1.7 (1.1)-(1.4) ამოცანის წარმოდგენა სასრულო ჯამის სახით

$$\text{შემოვიტანოთ } m = m(t) = \left[\frac{t}{l} \right], \quad t > 0$$

სადაც $[\cdot]$ არის ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი.

ახლა დავყოთ არე $E_m : 0 < x < t$, $ml < t < (m+1)l$, $m = 0, 1, 2, \dots$, იგი არის კვადრატის, წვეროს კოორდინატებით

$$A_m(0, ml), \quad B_m(0, (m+1)l),$$

$$C_m(l, (m+1)l) \text{ და } D_m(l, ml)$$

რომლის დაყოფის შედეგად მივიღებ 4 მართკუთხა სამკუთხედს :

$$E_m^1 := \triangle A_m O_m D_m, \quad E_m^2 := \triangle A_m O_m B_m,$$

$$E_m^3 := \triangle D_m O_m C_m, \quad E_m^4 := \triangle B_m O_m C_m,$$

სადაც O_m არის E_m კვადრატის ცენტრი.

ქვემოთ ჩვენ წარმოვადგენთ D_∞ -ში (1.1) – (1.4) ამოცანების კლასიკურ ამონახსნს

$u \in C^2(\overline{D_\infty})$ -ს სასრული ჯამის სახით, რომელიც დამოკიდებულია ამოცანის საწყის და სასაზღვრო პირობებსა და (1.1) განტოლების მარჯვენა მხარეზე.

პირველად, აღვნიშნოთ $p = p(x, t) \in E_0$.

E_0^1 სამკუთხედში (1.2) -სა და დალამბერის ფორმულის გამოყენებით, ტოლობა

$$u(x, t) = A_1(\varphi, \psi, t)(x, t) :=$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^1} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in E_0^1 \quad (1.5)$$

არის მართებული, სადაც $\Omega_{x,t}^1$ არის სამკუთხედი, წვეროებით (x, t) , $(x-t, 0)$ და $(x+t, 0)$ წერტილებში.

როგორც ვიცით, ყოველი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი V ფუნქციისა და (1.1) განტოლების მახასიათებელი მართკუთხედისათვის, $PP_1P_2P_3$ არედან სამართლიანია ტოლობა

$$v(P) = v(P_1) + v(P_2) - v(P_3) + \frac{1}{2} \int_{PP_1P_2P_3} \square v(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (1.6)$$

არის მართებული, სადაც P და P_3 , P_1 და P_2 არის მართკუთხედის მოპირდაპირე წვეროები და P წერტილის ორდინატა არის ყველაზე დიდი, ვიდრე სხვა მდებარე წერტილების.

ახლა, თუ $P \in E_0^2$, მაშინ (1.6) ტოლობის გამოყენებით, მართკუთხედის წვეროები წერტილებით $P(x, t)$, $P_1(0, t-x)$, $P_2(t, x)$, $P_3(t-x, 0)$ და ფორმულა (1.5)

წერტილში $P_2(t, x) \in E_0^1$, (1.1) და (1.3) დან ვნახავთ, რომ გვაქვს

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_2(\varphi, \psi, \mu_1, f)(x, t) \\ &:= \mu_1(t-x) + \frac{1}{2} [\varphi(t+x) - \varphi(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ &\quad (x, t) \in E_0^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

სადაც $\Omega_{x,t}^2$ არის კვადრატის $PP_2^*P_3P_1$, სადაც $P_2^* = (t+x, 0)$.

ანალოგიურად, გვაქვს

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_3(\varphi, \psi, \mu_2, f)(x, t) \\ &:= \mu_2(x+t-l) + \frac{1}{2} [\varphi(x-t) - \varphi(2l-x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{2l-x-t} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^3} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ &\quad (x, t) \in E_0^3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

და

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_4(\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, f)(x, t) := \mu_1(t-x) + \mu_2(x+t-l) + \\ &+ \frac{1}{2} [\varphi(t-x) - \varphi(2l-t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{2l-t-x} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^4} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (x, t) \in E_0^4 \end{aligned}$$

აქ $\Omega_{x,t}^3$ არის კვადრატის წვეროს კოორდინატებით:

$$P^3(x, t), P_1^3(l, x+t-l), P_2^3(x-t, 0), P_3^3(2l-x-t, 0).$$

ხოლო $\Omega_{x,t}^4$ ხუთკუთხედი წვეროს კოორდინატებით :

$$P^4(x, t), \quad P_1^4(0, t-x), \quad P_2^4(t-x, 0), \quad P_3^4(2l-x-t, 0), \quad P_4^4(l, x+t-l).$$

თუ წერტილი $P_0 = P_0(x, t) \in E_m$, $m \geq 1$, მაშინ $P_0 M_1 P_1 N_1$ -ით აღინიშნება (1.1) განტოლებაზე დამოკიდებული მახასიათებელი მართკუთხედი, რომლის წვეროები M_1 , N_1 ძევს $x=0$ და $x=l$ წრფეზე.

შესაბამისად, $M_1 = (0, t-x)$, $N_1 = (l, t+x-l)$, $P_1 = (l-x, t-l)$.

ანალოგიურად, $P_1 \in E_{m-1}$ -სთვის განვიხილავთ მართკუთხედს $P_1 M_2 P_2 N_2$,

რომლის წვეროები M_2 და N_2 ძევს $x=0$ და $x=l$ წრფეებზე. მაშასადამე, ამ

პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ მართკუთხედის $P_{i-1} M_i P_i N_i$ წვეროები M_i და N_i

შესაბამისად მდებარეობენ $x=0$ და $x=l$ წრფეებზე და ამის გამო $P_0 \in E_m$,

$$P_m \in E_0$$

სადაც $P_m = (l-x, t-ml)$ თუ m არის კენტი, ხოლო $P_m = (x, t-ml)$ თუ m

არის ლუწი. ამ შემთხვევაში, თუ წერტილი $P_0 \in E_m^1(E_m^4)$, მაშინ $P_m \in E_0^1(E_0^4)$

ნებისმიერი m -სთვის. თუ $P_0 \in E_m^2(E_m^3)$, მაშინ $P_m \in E_0^3(E_0^2)$ ყველა კენტი m -

სთვის და $P_m \in E_0^2(E_0^3)$ ყველა ლუწი m -სთვის.

M_i და N_i წერტილების კოორდინატებისთვის გვექნება

$$M_i = (0, t-x-(i-1)l), \quad N_i = (l, t+x-il), \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

$$M_i = (0, t+x-il), \quad N_i = (l, t-x-(i-1)l), \quad i = 2, 4, 6, \dots$$

დავამტკიცოთ ინდუქციით (1)-(4) განტოლების ამონახსნის $u \in C^2(\bar{D}_\infty)$ წარმოდგენა

$$D_\infty\text{-ში } P_0 \in E_m$$

$$u(P_0) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left[\mu_1(M_i) + \mu_2(N_i) + \frac{1}{2} \int_{P_{i-1} M_i P_i N_i} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] + (-1)^m u(P_m)$$

დამტკიცება.

1. შევამოწმოთ $m = 1$ -სთვის $P_0 \in E_1$

$$u(P_0) = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_1 + \int_{P_0 N_1 P_1 N_1} f(\xi, \tau) d\xi d\tau - u(P_1)$$

მაშინ ტოლობა ჭეშმარიტია

2. დავუშვათ, რომ m სთვის ჭეშმარიტია

3. ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია $(m+1)$ -სთვის

$$P_0 \in E_{m+1}$$

აქ (10) ფორმულის გამოყენებითა და $P_1 \in E_m$ გვექნება, $P_i \rightarrow P_{i+1}$, $M_i \rightarrow M_{i+1}$,

$N_i \rightarrow N_{i+1}$ მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} u(P_0) &= \mu_1 N_1 + \mu_2 N_1 + \int_{P_0 N_1 P_1 N_1} f d\xi d\tau - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} + (-1)^m u(P_{m+1}) + \\ &- \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left[\mu_1(M_{i+1}) + \mu_2(N_{i+1}) + \int_{P_i M_{i+1} P_{i+1} N_{i+1}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \\ &= \mu_1 N_1 + \mu_2 N_1 + \int_{P_0 N_1 P_1 N_1} f d\xi d\tau + \sum_{i=2}^{m+1} (-1)^{i-1} \left[\mu_1(M_i) + \mu_2(N_i) + \int_{P_{i-1} M_i P_i N_i} f d\xi d\tau \right] \\ &+ (-1)^{m+1} u(P_{m+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \left[\mu_1(M_i) + \mu_2(N_i) + \int_{P_{i-1} M_i P_i N_i} f d\xi d\tau \right] + (-1)^{m+1} u(P_{m+1}) \end{aligned}$$

მივიღეთ ჭეშმარიტობა.

სადაც (1.10)-ის გამო m კენტის დროს

$$u(P_m) = \begin{cases} A_1(\varphi, \psi, f)(P_m), & P_0 \in E_m^1 \\ A_3(\varphi, \psi, \mu_2, f)(P_m) & P_0 \in E_m^2 \\ A_2(\varphi, \psi, \mu_1, f)(P_m) & P_0 \in E_m^3 \\ A_4(\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2 f)(P_m) & P_0 \in E_m^4 \end{cases},$$

ხოლო, როცა m ლუწია

$$u(P_m) = \begin{cases} A_1(\varphi, \psi, f)(P_m), & \left| P_0 \in E_m^1 \right. \\ A_3(\varphi, \psi, \mu_1, f)(P_m) & \left| P_0 \in E_m^2 \right. \\ A_2(\varphi, \psi, \mu_2, f)(P_m) & \left| P_0 \in E_m^3 \right. \\ A_4(\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2 f)(P_m) & \left| P_0 \in E_m^4 \right. \end{cases},$$

აქ ოპერატორი A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ არის განსაზღვრული (1.5), (1.7)-(1.9) ფორმულებიდან.

დასკვნა

ნაშრომში განხილულია სიმის რხევის წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის შერეული ამოცანა. ასგეირსონის პრინციპისა და კლასიკური კოშის, დარბუსა და გურსას ამოცანების ცხადი სახით ამონახსნების გამოყენებით მიღებულია აღნიშნული ამოცანის ამონახსნი ეფექტურად სასრულო ჯამის სახით, მითითებულია წევრთა რაოდენობის მარტივი გამოსათვლელი ფორმულა. ამ მიდგომამ საშუალება მოგვცა ადრე ცნობილი შემთხვევებისაგან განსხვავებით მონაცემებზე ნაკლები სიგლუვისა და რაოდენობრივი შეზღუდვების პირობებში აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის მიღება, ასევე იგი საშუალებას იძლევა სივრცითი ცვლადის მიმართ არა მარტო დირიხლეს, არამედ ნეიმანისა და შერეული სასაზღვრო პირობებიანი ამოცანების ამოხსნას და საფუძველს უდებს არაწრფივი ამოცანების შესწავლას.

ლიტერატურა

- [1] A. V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*. (Russian) Second edition. "Nauka", Moscow, 1982.
- [2] A. V. Bitsadze and D. F. Kalinichenko, *Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics*. (Russian) Second edition. "Nauka", Moscow, 1985.
- [3] B. M. Budak, A. A. Samarskii and A. N. Tikhonov, *Problems in Mathematical Physics*. (Russian) Nauka, Moscow, 1979.
- [4] N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner and M. M. Smirnov, *Equations in Partial Derivatives of Mathematical Physics*. (Russian) Vysshaya Shkola, Moscow, 1970..
- [5] R. Kurant, *Partial Differential Equations*. (Russian) Translated from the English by T. D. Ventcel'; edited by O. A. Oleinik Izdat. "Mir", Moscow, 1964.
- [6] M. M. Smirnov, *Problems on the Equations of Mathematical Physics*. (Russian) Sixth edition, supplemented. Izdat. "Nauka", Moscow, 1975.
- [7] A. N. Tikhonov and A. A. Samarskiĭ, *The Equations of Mathematical Physics*. (Russian) Izdat. "Nauka", Moscow, 1977.
- [8] V. S. Vladimirov, *The Equations of Mathematical Physics*. (Russian) Fourth edition. "Nauka", Moscow, 1981.
- [9] V. S. Vladimirov, A. A. Vasharin, H. H. Karimova, V. P. Mikhailov, U. V. Sidorov and M. I. Shabunin, *Problems on the Equations of Mathematical Physics*. (Russian) Fizmatlit, Moscow, 2003.