



ლოგარითმულად ჩაზნექილი სიმკვრივის,
მისი განაწილების ფუნქციისა და წარმოებულის
მაქსიმალური დასაჯერობის
შეფასება, ძირითადი თვისებები და
ძალდებულება

სამაგისტრო ნაშრომი წარდგენილია
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტზე
მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის ხარისხის მინიჭების
მოთხოვნის შესაბამისად

ეკატერინე ნამგალაური

ხელმძღვანელი: ასოცირებული პროფესორი მალხაზ შაშიაშვილი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

სარჩევი

ანოტაცია	3
1 შესავალი	4
2 შეფასებები და მათი ძირითადი თვისებები	7
3 თანაბრად ძალდებულება	10
4 დამხმარე შედეგები და დამტკიცებები	13
4.1 ორი ფაქტი ლოგარითმულად ჩაზნექილ სიმკვრივებზე	13
4.2 დახასიათების დამტკიცება	14
4.3 $\hat{\varphi}_n$ -ის ძალდებულების დამტკიცება	16
5 $\hat{F}_n$ -ის ძალდებულების მტკიცება	26
6 $\hat{\varphi}'_n$ -ის ძალდებულების დამტკიცება L_2 სივრცეში	26
დასკვნა	29
ლიტერატურა	30

ანოტაცია

ჩვენ შევისწავლით ლოგარითმულად ჩაზნექილი ალბათური სიმკვრივის, მისი განაწილებისა და წარმოებულის არაპარამეტრულ მაქსიმალურ დასაჯერობის შეფასებას. ამ შეფასებების ზოგადი თვისებები მიიღება ორი დახასიათებით. ნაჩვენებია, რომ სუპრემუმის ნორმის მიხედვით ამ სიმკვრივისა და რისკის ფუნქციის შეფასებების კრებადობის რიგი კომპაქტურ ინტერვალზე მინიმუმ $(\log(n)/n)^{1/3}$ და როგორც წესი $(\log(n)/n)^{2/5}$ -ის ტოლია, სადაც, გარკვეულ რეგულარობის პირობებში ემპირიული განაწილების ფუნქციასა და სიმკვრივის შეფასების სათანადო განაწილების ფუნქციას შორის განსხვავება ქრება $o_p(n^{-1/2})$ რიგით. ჩვენ ასევე ვასაბუთებთ, რომ მაქსიმალური დასაჯერობის არაპარამეტრული შეფასების $\hat{\varphi}_n(x)$ -ის მარცხენა წარმოებული $\hat{\varphi}'_n(x-)$ წარმოადგენს $\varphi'(x-)$ -ის ძალდებულ შეფასებას L_2 სივრცეში, ანუ $\int_A^B (\hat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \xrightarrow{p} 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, სადაც $[A, B]$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ნებისმიერ კომპაქტურ ინტერვალს.

Abstract

We study nonparametric maximum likelihood estimation of a log-concave probability density, its derivative and its distribution function. Some general properties of these estimators are derived from two characterizations. It is shown that the rate of convergence with respect to supremum norm on a compact interval for the density and hazard rate estimator is at least $(\log(n)/n)^{1/3}$ and typically $(\log(n)/n)^{2/5}$, whereas the difference between the empirical and estimated distribution function vanishes with rate $o_p(n^{-1/2})$ under certain regularity assumptions. We also establish that the left derivative $\hat{\varphi}'_n(x-)$ of the nonparametric maximum likelihood estimate (NPMLE) $\hat{\varphi}_n(x)$ is the consistent estimate of $\varphi'(x-)$ in L_2 norm, that is $\int_A^B (\hat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \xrightarrow{p} 0$, when $n \rightarrow \infty$, where $[A, B]$ is an arbitrary compact interval of $\mathbb{R}$.

1 შესავალი

სიმკვრივების არაპარამეტრული შეფასების ორი გარკვეული მეთოდი არსებობს- სიმკვრივების გაგლეუების მეთოდი და თვისობრივი შეზღუდვები. წინა მდგომა მოიცავს, მათ შორის, სიმკვრივის გულოვან შეფასებას, შეფასებებს რომლებიც დაფუძნებულია დისკრეტულ ველვებებსა და ფუნქციის მწკრივებად გაშლაზე და ასევე შეფასებებს, რომლებიც დაფუძნებულია დაჯარიმების მეთოდზე. ეს შეფასებები შეიცავენ შერჩევაზე მორგებულ გარკვეულ პარამეტრებს, მაგალითად დაყოფის ბიჯს. ამ პარამეტრების შერჩევა შორს არის ტრიაალურისგან, რადგან მათი ოპტიმალური მნიშვნელობების მოძებნა დამოკიდებულია უცნობი f სიმკვრივის თვისებებზე. მეორე მდგომისას თავს ვარიდებთ მსგავს პრობლემებს f სიმკვრივის ფორმაზე თვისობრივი შეზღუდვების მოთხოვნით. მაგალითად, ერთგანზომილებიან შემთხვევაში მონოტონურობა ან ამოზნექილობა გარკვეულ ინტერვალზე. მსგავსი დაშვებები ხშირად მიზანშეწონილია ანდა მკაცრად დასაბუთებულია გარკვეულ რეალურ შემთხვევებში.

პირველად სიმკვრივის შეფასება მისი ფორმის შეზღუდვით განხილული იყო გრენანდერის მიერ, რომელმაც აღმოაჩინა, რომ $[0, \infty)$ - ინტერვალზე არაზრდადი f სიმკვრივის მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება $\hat{f}_n^{mon}$ მოიცემა ემპირიული განაწილების ფუნქციის მინიმალური ჩაზნექილი მაჟორანტის მარცხენა წარმოებულის მეშვეობით. ეს კვლევა გააგრძელეს რაომ ([19]) და გრონებუმმა ([11]-[12]) რომლებმაც განავითარეს ასეთი სიმკვრივების შეფასების ასიმბტოტური განაწილების თეორია, კერძოდ მათ აჩვენეს, რომ ფიქსირებულ $t > 0$ წერტილებში შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას $n^{\frac{1}{3}}(f - \hat{f}_n^{mon})(t)$ გარკვეულ რეგულარობის პირობებში აქვს არა-გაუსური ზღვარიტი განაწილება. სიმკვრივეთა შეფასების სხვადასხვა ამოცანებში, რომლებიც დაკავშირებულია მონოტონურ სიმკვრივებთან, კრებადობის სტანდარტული რიგი არის $O_p(n^{-\frac{1}{3}})$ წერტილოვნად (ფიქსირებულ $t > 0$ წერტილში). სუპრემუმის ნორმის კრებადობის რიგი შენელებულია $\log(n)^{\frac{1}{3}}$ თანამამრავლით. ([16]).

უცნობი მონოტონური სიმკვრივის შეფასების ამოცანა შეიძლება გაფართოვდეს და მოიცვას უნიმოდალური სიმკვრივები. გვახსოვდეს, რომ f სიმკვრივე ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე უნიმოდალურია თუ არსებობს რიცხვი $M = M(f)$ ისეთი, რომ f არის არაკლებადი $(-\infty, M]$ -ზე და არაზრდადი $[M, \infty)$ -ზე. თუ მოდის რეალური მნიშვნელობა წინასწარ ცნობილია, უნიმოდალური სიმკვრივის შეფასება დაიყვანება მონოტონურ შეფასებაზე მარტივი წესით, მაგრამ სიტუაცია არსებითად განსხვავებულია, როცა M უცნობია. ამ შემთხვევაში დასაჯერობის ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული, პრობლემა წარმოიშვება მონაცემთა იმ წერტილებში, რომლებიც ჰიპოთეზური მოდის მიდამოშია. იმ შემთხვევაშიც კი, როცა მოდა ცნობილია სიმკვრივის შეფასება არაძალდებულია, ამ ფენომენს "ლაპლასის წაწვეტებას"(spiking) უწოდებენ. ამ ამოცანის გადაჭრის რამდენიმე გზა მოცემულია ვეგმანის, ვუდრუფისა და სანის ნაშრომებში([28]) ([29]),

ასევე კულიკოვისა და ლოპუჰას ნაშრომში ([18]), მაგრამ ყოველ მათგანში უცნობი f სიმკვრივეზე მოითხოვება დამატებითი ანალიზური შეზღუდვა.

სიმკვრივის გაგლუვებისა და მისი ფორმის მიხედვით შეზღუდვის კომბინაცია გამოკვლეული იყო ეგერმონტისა და ლა-რიკას მიერ ([9]). იმისთვის, რომ გაეუმჯობესებინათ $L_1(\mathbb{R})$ სივრცეში $n^{-\frac{1}{3}}$ კრებადობის ნელი რიგი, მათ მიიღეს გრენანდერის-ტიპის მსგავსი შეფასება გულოვანი სიმკვრივის შეფასების პირველყოფილი ფუნქციის უმცირესი ჩაზნექილი მაქორანტის წარმოებულის სახით, კრებადობის რიგით $O_p(n^{-\frac{2}{5}})$.

ამოზნექილი კლებადი სიმკვრივის შეფასება $[0, \infty)$ -ზე პირველმა განიხილა ანევსკიმ ([1]). ამოცანა მდგომარეობდა ჩიტების მიგრაციაში, რომელიც წამოჭრა ჰამპელმა ([15]) (1987) და გადაწვიტა გრონებუმმა ([13]) (2001). მათ ააგეს სათანადო უცნობი სიმკვრივის შეფასება, მოგვცეს მისი დახასიათება და დაასაბუთეს მისი ძალდებულება უცნობი სიმკვრივის დადებითი სიმრუდის წერტილებში. მათ დაადგინეს, რომ შეფასება უნდა იყოს უბან-უბან წრფივი კვანძებით დაკვირვებად წერტილებს შორის. იმ დამატებით დაშვებებში, როცა ნამდვილი სიმკვრივე f ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია $[0, \infty)$ -ზე, მათ აჩვენეს, რომ MLE (მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება) კრებადია $O_p(n^{-\frac{2}{5}})$ რიგით, რაც შედარებით უკეთესია ვიდრე სიმკვრივეზე მონოტონურობის მოთხოვნისას. $[0, \infty)$ -ზე სიმკვრივეების მონოტონურობისა და ამოზნექილობის შეზღუდვები ჩასმულია K -მონოტონური სიმკვრივეების ზოგად თეორიაში ([3]).

მოცემულ სამაგისტრო სადიპლომო ნაშრომში, ჩვენ ვითხოვთ ალტერნატიულ და სავსებით ბუნებრივ შეზღუდვას შესაფასებელი სიმკვრივის ფორმაზე. კერძოდ მოვითხოვთ უცნობი f სიმკვრივის ლოგარითმულად ჩაზნექილობას. ეს ნიშნავს რომ:

$$f(x) = \exp \varphi(x)$$

რაიმე ჩაზნექილი $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$ ფუნქციისთვის. ეს კლასი საკმაოდ მოსახერხებელია, ვინაიდან იგი მოიცავს მრავალ ცნობილ პარამეტრულ სიმკვრივეს. კერძოდ ის შეიცავს არაგადაგარებულ ნორმალურ სიმკვრივეებს, ყველა გამა სიმკვრივეს ფორმის პარამეტრით ≥ 1 და ყველა ბეტა სიმკვრივეს პარამეტრით ≥ 1 . სხვა მაგალითებია ლოჯისტიკური და გუმბელის სიმკვრივეები. ლოგარითმულად ჩაზნექილი სიმკვრივეები საინტერესოა ეკონომეტრიკაში, იხილეთ ([2]) ნაშრომი სხვა მაგალითებისა და შეჯამებისათვის. ბარლოუმ და პროშანმა ([5]) აღწერეს ლოგარითმულად ჩაზნექილობის მომგებიანი თვისებები საიმედოობის თეორიაში, როცა ჩანგი და ვოლტერი ([6]) იყენებენ ლოგარითმულად ჩაზნექილ სიმკვრივეებს, როგორც "ინგრედიენტს" (შემადგენელს) არაპარამეტრულ შერეულ მოდელებში. ლოგარითმულად ჩაზნექილობას აქვს გარკვეული მნიშვნელობა ასევე არაპარამეტრულ ბაიესურ ანალიზში.

შევნიშნოთ, რომ სიმკვრივის ლოგარითმულად ჩაზნექილობა იწვევს სიმკვრივის უნიმოდალურობას. თუ სიმკვრივისთვის მოვითხოვთ ლოგარითმულად ჩაზნექილობას, მაშინ ზემოთ აღნიშნული, ინტენსიური წაწვეტების პრობლემის (spiking) გადასაჭრელად ვღებულობთ

ახალ მიდგომას, რომელიც გამოიყენება უნიმოდალური, შესაძლოა წანაცვლებული სიმკვრივის შეფასებისთვის. უფრო მეტიც, ლოგარითმულად ჩაზნექილი სიმკვრივის შეფასება არის სავსებით ავტომატური, იმ აზრით, რომ არ არის საჭირო არც ბიჯის, არც გულოვანი ფუნქციისა ან სხვა რაიმე შერჩევის პარამეტრების არჩევა. საბოლოოდ, მონაცემების გათამაშება (სიმულაცია) უკვე შეფასებული სიმკვრივიდან შედარებით მარტივია. ყველა აღწერილი თვისება იძლევა ახალი სახის შეფასებას, რომელიც მას მიმზიდველს ხდის სტატისტიკურ გამოყენებებში.

დღეისთვის ცოტა არის ცნობილი ლოგარითმულად ჩაზნექილი სიმკვრივების შეფასებაზე დიდი მოცულობის შერჩევის თეორიაში. სენგუპტა და პაული ([23]) სწავლობენ განაწილების ფუნქციების ლოგარითმულად ჩაზნექილობის ამოცანას კომპაქტურ ინტერვალზე. ვოლტერმა ([27]) შემოიღო გარკვეული სახის შერეული მოდელების ლოგარითმულად ჩაზნექილობის განზოგადება, მაგრამ მისი თეორია ვერ ფარავს სიმკვრივეთა შეფასებების ასიმბტოტურ თვისებებს. პალმა ([20]) დაამტკიცა, რომ ლოგარითმულად ჩაზნექილი NPMLE (მაქსიმალური დასაჯერობის არაპარამეტრული შეფასება) ძალდებულია, მაგრამ არ დაუდგენია მისი კრებადობის რიგი.

ვოლტერმა ([27]) და პალმა ([20]) ლოგარითმულად ჩაზნექილი NPMLE-ს (მაქსიმალური დასაჯერობის არაპარამეტრული შეფასება) გამოსათვლელად გამოიყენეს იტერაციული ამოზნექილი მაჟორანტის ალგორითმის აგების უბეში ვერსია. რუფიბახის ([22]) ნაშრომში შეიძლება შევხვდეთ რამდენიმე ალგორითმის დეტალურ აღწერასა და შედარებას, როცა დამბდგენმა ([8]) აღწერა აქტიური სიმრავლის ალგორითმი, რომელიც წვეროების რაოდენობის შემცირების ალგორითმის მსგავსია და დღეისთვის ყველაზე მეტად ეფექტური ჩანს.

მეორე პარაგრაფში ჩვენ შემოგვაქვს ლოგარითმულად ჩაზნექილი მაქსიმალური დასაჯერობის სიმკვრივის შეფასება. ვიხილავთ მის ძირითად თვისებებსა და ვღებულობთ მის ორ დახასიათებას. მეოთხე პარაგრაფში ნაჩვენებია, რომ $\{f > 0\}$ სიმრავლის კომპაქტურ ქვესიმრავლეზე სუპრემუმის ნორმა $\hat{f}_n$ სიმკვრივის შეფასებასა და ნამდვილ სიმკვრივეს შორის იკრიბება 0-ისკენ $O_p((\log(n)/n)^\gamma)$ რიგით, სადაც $\gamma \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$ f -ის სიგლუვებზე დამოკიდებული. კერძოდ, ჩვენი შეფასება ადაპტირებულია f -ის უცნობ სიგლვესთან. სიმკვრივის შეფასების ძალდებულება ავტომატურად იწვევს განაწილების ფუნქციის შეფასების ძალდებულებას.

შევნიშნოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი ფაქტი: f სიმკვრივის ფუნქციის ლოგარითმულად ჩაზნექილობა ავტომატურად იწვევს შესაბამისი რისკის ფუნქციის $h = f/(1 - F)$ არაკლებადობას ([5]). მაშასადამე უცნობი f სიმკვრივის და მისი F განაწილების ფუნქციის შეფასებები ავტომატურად იძლევა რისკის h ფუნქციის ძალდებულებას, რომელიც აღწერილია მესამე პარაგრაფის ბოლოს. მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში ძირითადად გამოყენებულია დამბდგენისა და რუფიბახის ნამუშევარი ([7]).

ასევე მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში დასაბუთებულია, რომ მაქსიმალური დასაჯე-

რობის არაპარამეტრული შეფასების $\hat{\varphi}_n(x)$ -ის მარცხენა წარმოებული $\hat{\varphi}'_n(x-)$ წარმოადგენს $\varphi'(x-)$ -ის ძალდებულ შეფასებას L_2 სივრცეში, ანუ $\int_A^B (\hat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \xrightarrow{p} 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, სადაც $[A, B]$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ლერძის ნებისმიერ კომპაქტურ ინტერვალს, რომელიც განხილულია მე-6 პარაგრაფში.

2 შეფასებები და მათი ძირითადი თვისებები

ვთქვათ X არის შემთხვევითი სიდიდე F განაწილების ფუნქციითა და ლებეგის სიმკვრივით

$$f(x) = \exp \varphi(x)$$

რაიმე ჩაზნექილი $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$ ფუნქციისთვის. ჩვენი მიზანია შევაფასოთ f , F განაწილების მქონე $n > 1$ მოცულობის შემთხვევით შერჩევაზე დაყრდნობით. $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ იყოს შესაბამისი რიგობრივი სტატისტიკები. ნებისმიერი $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრული ლოგარითმულად ჩაზნექილი ალბათური f სიმკვრივისთვის ნორმირებული ლოგარითმული დასაჯერობის ფუნქცია მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\int \log f d\mathbb{F}_n = \int \varphi d\mathbb{F}_n \quad (1)$$

სადაც $\mathbb{F}_n$ აღნიშნავს მონაცემთა ემპირიულ განაწილების ფუნქციას. იმისთვის, რომ შევამსუბუქოთ f -ის შეზღუდვა, იყოს ალბათური სიმკვრივე და მივიღოთ კრიტერიუმის ფუნქცია, რომელიც მაქსიმალური ხდება ყველა ჩაზნექილი φ ფუნქციისთვის ამოზნექილ ფუნქციათა სიმრავლეზე ვიყენებთ სტანდარტულ ხერხს (1) გამოსახულებაზე ლაგრანჟის წევრის დამატებით და ვღებულობთ ფუნქციონალს:

$$\psi_n(\varphi) := \int \varphi d\mathbb{F}_n - \int \exp \varphi(x) dx$$

(იხილეთ სილვერმანის ([25]) ნაშრომის 3.1 თეორემა) $\varphi = \log f$ -ის არაპარამეტრული მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება მაქსიმალურს ხდის ამ ფუნქციონალს ყველა ჩაზნექილ ფუნქციათა სიმრავლეზე.

$$\hat{\varphi}_n := \arg \max_{\varphi - \text{concave}} \psi_n(\varphi)$$

და $\hat{f}_n := \exp \hat{\varphi}_n$.

$\hat{\varphi}_n$ -ის არსებობა, ერთადერთობა და ფორმა: ადვილი საჩვენებელია, რომ $\psi_n(\varphi) > -\infty$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ φ ღებულობს ნამდვილ მნიშვნელობებს $[X_1, X_n]$ -ზე. შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია დამოუკიდებლად პალისა და სხვების ასევე რუფიბახის მიერ ნაშრომებში ([20]), ([22]). აქედან გამომდინარე, უფრო ზოგადი მოსაზრებები იქნა წამოჭრილი დამბდგენის მიერ ([8]) ნაშრომში.

თეორემა 2.1. *NPMLE (მაქსიმალური დასაჯერობის არაპარამეტრული შეფასება) $\hat{\varphi}_n$ არსებობს და ერთადერთია. ის წრფივია ყველა ინტერვალზე: $[X_j, X_{j+1}]$, $1 \leq j < n$. უფრო მეტიც, $\hat{\varphi}_n = -\infty$ $\mathbb{R} \setminus [X_1, X_n]$ -ზე.*

დახასიათება და შემდეგი თვისებები: ჩვენ ვიძლევიტ $\hat{\varphi}_n$, $\hat{f}_n$ შეფასებებისა და ასევე შესაბამის $\hat{F}_n$ განაწილების ფუნქციის ორ დახასიათებას, სადაც

$$\hat{F}_n(x) = \int_{-\infty}^x \hat{f}_n(r) dr$$

პირველი დახასიათება არის შემოფოთების ფუნქციისა და $\hat{\varphi}_n$ ფუნქციის ტერმინებში.

თეორემა 2.2. *ვთქვათ $\tilde{\varphi}$ არის ისეთი ჩაზნექილი ფუნქცია, რომ $\{x : \tilde{\varphi}(x) > -\infty\} = [X_1, X_n]$, მაშინ $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_n$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ*

$$\int \Delta(x) d\mathbb{F}_n(x) \leq \int \Delta(x) \exp \tilde{\varphi}(x) dx \quad (2)$$

ნებისმიერი $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -თვის, ისეთი, რომ $\tilde{\varphi} + \lambda \Delta$ ჩაზნექილია რაიმე $\lambda > 0$ -თვის.

თუ 2.2 თეორემაში ჩავსვავთ შესაბამისად შემოფოთების Δ ფუნქციას, მაშინ მივიღებთ $\hat{\varphi}_n$ და $\hat{F}_n$ -ზე ღირებულ ინფორმაციას. პირველი ილუსტრაციისთვის $\mu(G)$ და $Var(G)$ იყოს საშუალო და დისპერსია შესაბამისად ნამდვილ ღერძზე G განაწილების ფუნქციისა სასრული მეორე მომენტი. თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta(x) := \pm x$ ან $\Delta(x) := -x^2$ 2.2 თეორემაში, მაშინ ვღებულობთ შემდეგს:

შედეგი 2.3. $\mu(\hat{F}_n) = \mu(\mathbb{F}_n)$ და $Var(\hat{F}_n) \leq Var(\mathbb{F}_n)$

ჩვენი მეორე დახასიათება $\mathbb{F}_n$ ემპირიული განაწილების ფუნქციისა და $\hat{F}_n$ განაწილების ფუნქციის შეფასების ტერმინებშია. $h : [X_1, X_n] \rightarrow \mathbb{R}$ უწყვეტი, უბან-უბან წრფივი ფუნქციისთვის ჩვენ განვსაზღვრავთ მის "კვანძების" სიმრავლეს შემდეგნაირად:

$$S_n(h) := \{t \in (X_1, X_n) : h'(t-) \neq h'(t+)\} \cup \{X_1, X_n\}$$

შევნიშნოთ, რომ $\hat{\varphi}_n$ არის მაგალითი ასეთი h ფუნქციისა, რომლისთვისაც $S_n(\hat{\varphi}_n) \subset \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

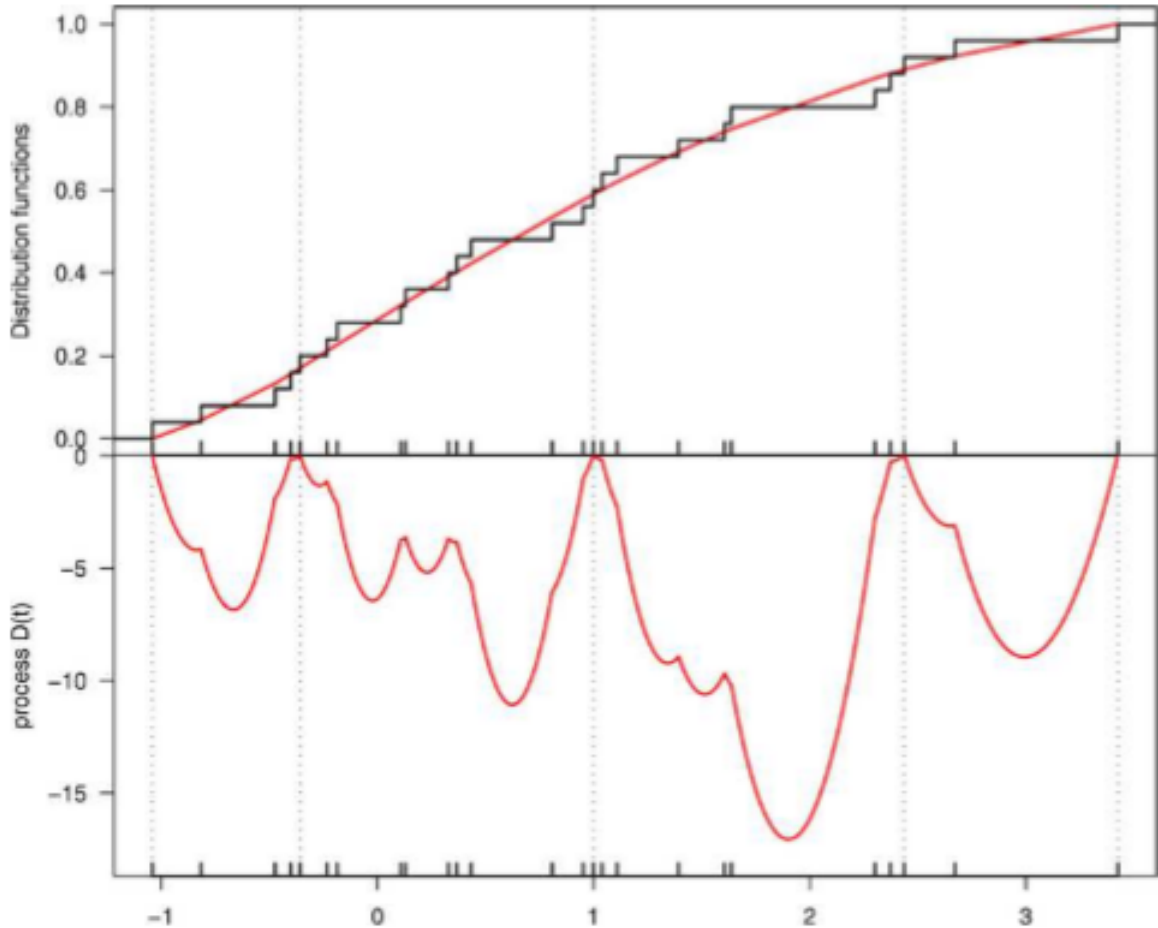
თეორემა 2.4. *ვთქვათ $\tilde{\varphi}$ არის ისეთი ჩაზნექილი ფუნქცია, რომელიც წრფივია ყველა $[X_j, X_{j+1}]$, $1 \leq j < n$ ინტერვალზე. სადაც $\tilde{\varphi} = -\infty$, $\mathbb{R} \setminus [X_1, X_n]$ -ზე. $\tilde{F}(x) := \int_{-\infty}^x \exp \tilde{\varphi}(r) dr$ -ის განსაზღვრით ჩვენ ვუშვებთ შემდგომში, რომ $\tilde{F}(X_n) = 1$, მაშინ $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_n$ და $\tilde{F} = \hat{F}_n$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ნებისმიერი $t \in [X_1, X_n]$ -თვის*

$$\int_{X_1}^t \tilde{F}(r) dr \leq \int_{X_1}^t \mathbb{F}_n(r) dr \quad (3)$$

ტოლობით იმ შემთხვევაში თუ $t \in S_n(\tilde{\varphi})$

2.4 თეორემის კონკრეტული შედეგები არის, რომ $\hat{F}_n$ განაწილების ფუნქციის შეფასება ძალიან ახლოსაა ემპირიული განაწილების $\mathbb{F}_n$ ფუნქციისათვის $S_n(\hat{\varphi}_n)$ -ზე.

შედეგი 2.5. $\mathbb{F}_n - n^{-1} \leq \hat{F}_n \leq \mathbb{F}_n + n^{-1}$ $S_n(\hat{\varphi}_n)$ -ზე.



ნახაზი 1: გამოსახულია განაწილების ფუნქციები და $D(t)$ პროცესი გუმბელის მაგალითისთვის.

1 ნახაზზე ილუსტრირებულია 2.4 თეორემა და 2.5 დასკვნა. ნახაზის ზედა ნაწილი შესაბამისაა $\mathbb{F}_n$ და $\hat{F}_n$ -ს, როცა შერჩევა მოიცავს $n = 25$ შემთხვევითი რიცხვის გენერირებით $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრული განაწილებიდან გუმბელის სიმკვრივით: $f(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$ დაშტრისული ვერტიკალური წრფეები აჩვენებს $\hat{\varphi}_n$ -ის "kinks" როცა $t \in S_n(\hat{\varphi}_n)$ შევნიშნოთ, რომ $\hat{F}_n$ და $\mathbb{F}_n$ მართლაც ახლოს არიან ერთმანეთთან ამ უკანასკნელ სიმრავლეზე ტოლობით ბოლო-მარჯვენა X_n წერტილში. ქვედა ნახაზი აჩვენებს პროცესს:

$$D(t) := \int_{X_1}^t (\hat{F}_n - \mathbb{F}_n)(r) dr$$

$t \in [X_1, X_n]$ -თვის. როგორც 2.4 თეორემაში ითქვა ეს პროცესი არადადებითია და $S_n(\hat{\varphi}_n)$ -ზე 0-ის ტოლია.

3 თანაბრად ძალდებულება

შემოვიღოთ რამდენიმე აღნიშვნა. ნებისმიერი ნატურალური $n > 1$ -თვის, განვსაზღვრავთ

$$\rho_n := \log(n)/n$$

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის თანაბარი ნორმა $I \subset \mathbb{R}$ აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$\|g\|_\infty^I := \sup_{x \in I} |g(x)|$$

ვამბობთ, რომ, g ეკუთვნის $H^{\beta,L}(I)$ ჰელდერის კლასს, მაჩვენებლით $\beta \in [1, 2]$ და მუდმივით $L > 0$, თუ ყველა $x, y \in I$ -თვის გვაქვს:

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{თუ } \beta = 1$$

$$|g'(x) - g'(y)| \leq L|x - y|^{\beta-1} \quad \text{თუ } \beta > 1$$

$\hat{\varphi}_n$ -ის თანაბარი ძალდებულება: ჩვენი მთავარი შედეგი შემდეგი თეორემაა

თეორემა 3.1. *დავუშვათ, რომ $\varphi = \log f$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს, $\varphi \in H^{\beta,L}(T)$ რაიმე მაჩვენებლით $\beta \in [1, 2]$ და რაიმე მუდმივით $L > 0$. $\{f > 0\}$ გულის $T = [A, B]$ ქვეინტერვალზე, მაშინ*

$$\max_{t \in T} (\hat{\varphi}_n - \varphi)(t) = O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)}),$$

$$\max_{t \in T(n,\beta)} (\varphi - \hat{\varphi}_n)(t) = O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)})$$

$$\text{სადაც } T(n, \beta) := [A + \rho_n^{1/(2\beta+1)}, B - \rho_n^{\beta/(2\beta+1)}]$$

აღვნიშნოთ, რომ წინა შედეგი სამართლიანია თუ $\hat{\varphi}_n - \varphi$ -ს შევცვლით $\hat{f}_n - f$. კარგად ცნობილია, რომ კრებადობის რიგი 3.1 თეორემაში ოპტიმალურია, იმ შემთხვევაშიც კი თუ β ცნობილია ამრიგად, ჩვენი შეფასებები ადაბტირებულია f -ის უცნობი სიგლუვის მაჩვენებლის დიაპაზონიდან $\beta \in [1, 2]$.

ასევე, ავღნიშნოთ, რომ φ -ს ჩაზნექილობა გულისხმობს მის ლიფშიცის აზრით უწყვეტობას, რაც ნიშნავს, რომ მიეკუთვნება $H^{1,L}(T)$ რაღაც $L > 0$ -ზე ნებისმიერ $T = [A, B]$ ინტერვალზე, სადაც $A > \inf\{f > 0\}$ და $B < \sup\{f > 0\}$. აქედან ამომდინარე, 3.1 თეორემიდან ადვილად გამოდის, რომ $\hat{f}_n$ ძალდებულია $L_1(\mathbb{R})$ -ში ხოლო $\hat{F}_n$ თანაბრად ძალდებულია.

შედეგი 3.2.

$$\int |\hat{f}_n(x) - f(x)| dx \rightarrow_p 0 \quad \text{და} \quad \|\hat{F}_n - F\|_\infty^{\mathbb{R}} \rightarrow_p 0$$

თეორემა 3.3. *ვიგულისხმობთ, რომ 3.1 თეორემის დაშვებები სრულდება. ვიგულისხმობთ შემდეგში, რომ $\varphi'(x) - \hat{\varphi}(y) \geq C(y - x)$ რაიმე $C > 0$ მუდმივისთვის და ნებისმიერი $A \leq x < y \leq B$, სადაც φ' წარმოადგენს $\varphi'(\cdot -)$ ან $\varphi'(\cdot +)$, მაშინ:*

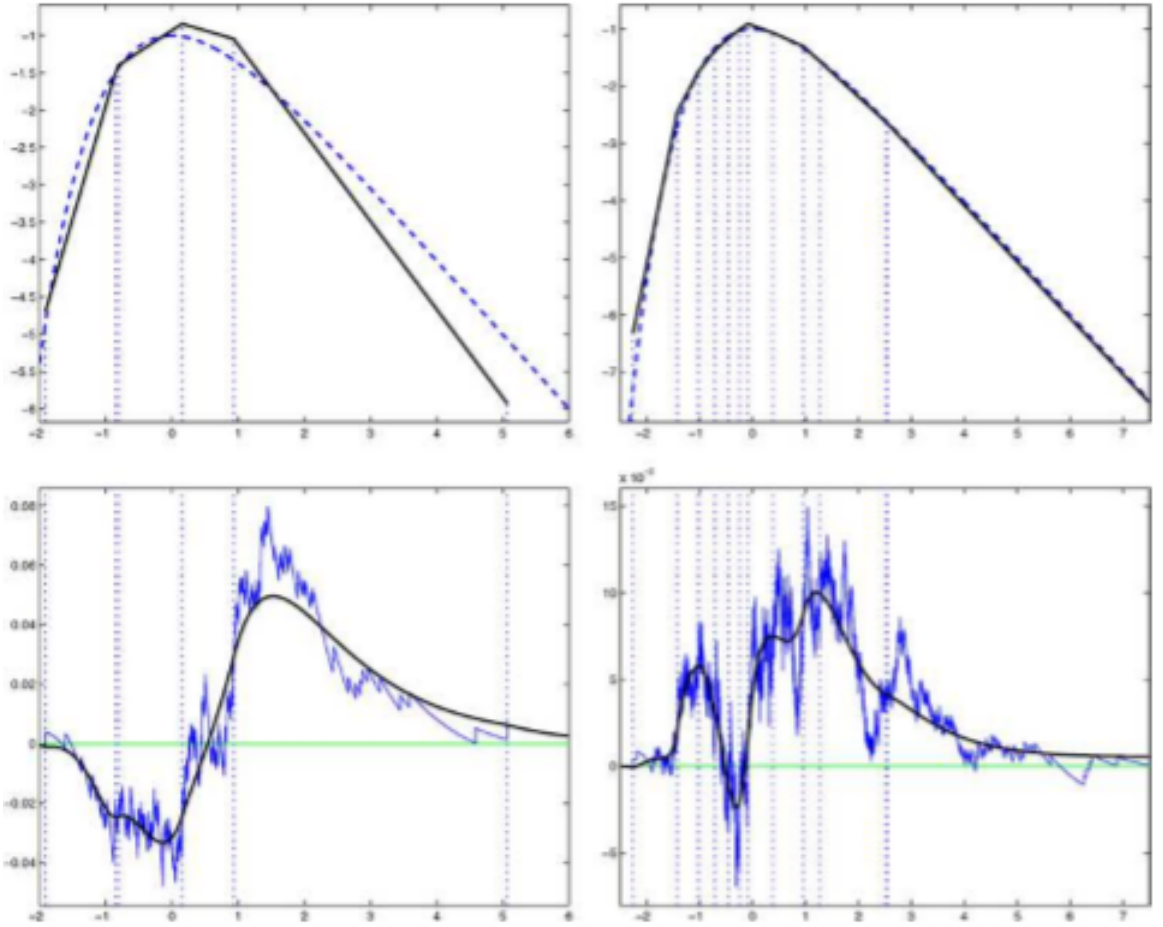
$$\max_{t \in T(n,\beta)} |\hat{F}_n(t) - F_n(t)| = O_p(\rho_n^{3\beta/(4\beta+2)})$$

კერძოდ, თუ $\beta > 1$, მაშინ

$$\max_{t \in T(n, \beta)} |\hat{F}_n(t) - \mathbb{F}_n(t)| = o_p(n^{-1/2})$$

ამრიგად, გარკვეულ რეგულარულ პირობებში, $\hat{F}_n$ და $\mathbb{F}_n$ შეფასებები ასიმპტოტურად ექვივალენტურები არიან კომპაქტურ სიმრავლეებზე. ამ ტიპის დასკვნები ცნობილია გრენანდერის შეფასებებით ([17]) და უმცირეს კვადრატთა სიმკვრივის მეთოდით მიღებული შეფასებები $[0, \infty)$ -ზე. ([4]).

მაგალითი 3.4. მოვახდინოთ 3.1 და 3.3 თეორემების ილუსტრირება მონაცემთა სიმულაციით, ისევ გუმბელის განაწილებიდან, როცა $\varphi(x) = -x - e^{-x}$. აქ $\varphi''(x) = -e^{-x}$, რადგან ჩვენი თეორემების დაშვებები სამართლიანია, როცა $\beta = 2$ ნებისმიერ კომპაქტურ T ინტერვალზე. მე-2 ნახაზის ზედა ნაწილი აჩვენებს ლოგ-სიმკვრივე φ -ს (დაშტრიხული ხაზი) და $\hat{\varphi}_n$ შეფასებას (ხაზი), როცა $n = 200$ (მარცხენა) და $n = 2000$ (მარჯვენა). ქვედა ნაწილი აჩვენებს შესაბამის ემპირიულ პროცესებს $n^{1/2}(\mathbb{F}_n - F)$ (არათანაბარი (jagged) წირი) და $n^{1/2}(\hat{F}_n - F)$ (გლუვი წირები). პირველ რიგში, $\hat{\varphi}_n$ შეფასების ხარისხი საკმაოდ კარგია ბოლოებშიც კი და როგორც მოსალოდნელი იყო მისი ხარისხი იზრდება მონაცემთა შერჩევის მოცულობის ზრდისას. ემპირიულ პროცესებზე დაკვირვებისას $n^{1/2}(\mathbb{F}_n - F)$ -სა და $n^{1/2}(\hat{F}_n - F)$ -ს შორის მსგავსება იზრდება მონაცემთა რაოდენობის ზრდასთან ერთად, მაგრამ შედარებით ნელა. შევნიშნოთ, რომ $\hat{F}_n$ უკეთესია $\mathbb{F}_n$ -ზე F -დან მაქსიმალური დაშორების ტერმინებში, რომელსაც მივყავართ მომდევნო პარაგრაფისკენ.



ნახაზი 2: სიმკვრივის ფუნქციები და ემპირიული პროცესები გუმბელის მაგალითებში, როცა $n = 200$ და $n = 2000$.

ლემა 3.5 (მარშალის ლემა). ყველა გათამაშებებში რასაც დავაკვირდით $\hat{F}_n$ აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$\| \hat{F}_n - F \|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \| F_n - F \|_{\infty}^{\mathbb{R}} \quad (4)$$

იმ პიოებში, რომ f ნამდვილად ლოგარითმულად ჩაზნექილია.

მეორე ნახაზი გვიჩვენებს ამ ფენომენის ორ რიცხვით მაგალითს. ამ მაგალითებისა და გრენანდერის შეფასების F_n^{mon} მარშალის ლემის მიხედვით ჩვენ თავდაპირველად ვცადეთ გადაგვემოწმებინა, რომ (4) სამართლიანია თითქმის ყველგან ნებისმიერი $n > 1$ -თვის. თუმცა შეიძლება მოვიყვანოთ კონტრმაგალითი, სადაც დარღვეული იქნება (4) იმისდა მიუხედავად თუ მარჯვენა მხარე გამრავლებული იქნება ნებისმიერ ფიქსირებულ მუდმივ $C > 1$ -ზე. მიუხედავად ამისა, ჩვენი პირველი მცდელობები დამთავრდა მარშალის ლემის ვარიანტით. ამოზნექილი სიმკვრივის შეფასებისათვის იხილეთ დამბდგენისა და სხვების ნაშრომი ([8]). მოცემული დასმისთვის ვვარაუდობთ, რომ (4) ჭეშმარიტია ასიმპტოტურად ალბათობით 1, როცა $n \rightarrow \infty$,

ანუ:

$$\mathbb{P}(\|\hat{F}_n - F\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \|\mathbb{F}_n - F\|_{\infty}^{\mathbb{R}}) \rightarrow 1$$

მონოტონური რისკის ფუნქციის შეფასება: მონოტონური რისკის ფუნქციის შეფასება აღწერილია მაგალითად რობერტსონისა და სხვების ნაშრომში ([21]). ისინი პირდაპირ წყვეტენ იზოტონური შეფასების ამოცანას, რომელიც გრენანდერის სიმკვრის შეფასების მსგავსია. ასეთ დასმაში ჰალმა და სხვებმა ([10]) ასევე ჰალმა და ვან კაილეგომ ([14]) განიხილეს მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია სათანადო გულოვანი შეფასებების მოდიფიცირებაზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ ჩვენს დასმაში გამომდინარეობს, რომ:

$$\hat{h}_n(x) := \frac{\hat{f}_n(x)}{1 - \hat{F}_n(x)}$$

რომელიც განსაზღვრავს რისკის ფუნქციის მარტივ ჩადგმის შეფასებას $(-\infty, X_n)$ -ზე, რომელიც ასევე არაკლებადია. თეორემა 3.1 და შედეგი 3.2-ს თანახმად ეს თანაბრად ძალდებულება $\{f > 0\}$ გულის ნებისმიერ კომპაქტურ სუბინტერვალზე 3.1 და 3.3 თეორემები შეიცავენ კრებადობის რიგსაც კი შემდეგნაირად.

შედეგი 3.6. 3.3 თეორემის დაშვებებში:

$$\max_{t \in T(n, \beta)} |\hat{h}_n(t) - h(t)| = O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)})$$

4 დამხმარე შედეგები და დამტკიცებები

4.1 ორი ფაქტი ლოგარითმულად ჩაზნეჟილ სიმკვრივებზე

შემდეგი ორი შედეგი ლოგარითმულად ჩაზნეჟილ $f = \exp \varphi$ სიმკვრივესა და მის F განაწილების ფუნქციაზე არის დამოუკიდებელი ინტერესისთვის. პირველი შედეგი იწვევს იმას, რომ f სიმკვრივეს აქვს სუბექსპონენციალური ბოლოები მაინც.

ლემა 4.1.1. ნებისმიერი $x_1 < x_2$ წერტილისთვის

$$\sqrt{f(x_1)f(x_2)} \leq \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

უფრო მეტიც, $x_0 \in \{f > 0\}$ -თვისა და ნებისმიერი ნამდვილი $x \neq x_0$ -თვის

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} \leq \begin{cases} \left(\frac{h(x_0, x)}{f(x_0)|x - x_0|} \right)^2 \\ \exp \left(1 - \frac{f(x_0)|x - x_0|}{h(x_0, x)} \right), \end{cases} \quad \text{თუ } f(x_0)|x - x_0| \geq h(x_0, x)$$

სადაც

$$h(x_0, x) := F(\max(x_0, x)) - F(\min(x_0, x)) \leq \begin{cases} F(x_0), & \text{თუ } x < x_0 \\ 1 - F(x_0) & \text{თუ } x > x_0 \end{cases}$$

კარგად ცნობილი მეორე ბარლოუსა და პროშანის შედეგი ([5]) უზრუნველყოფს შემდეგ კავშირს f სიმკვრივისა და F განაწილების ფუნქციას შორის. კერძოდ, ეს გულისხმობს, რომ $f/(F(1-F))$ 0-ისგან დაშორებულია $\{x : 0 < F(x) < 1\}$ -ზე.

ლემა 4.1.2. f/F არაზრდადია $\{x : 0 < F(x) \leq 1\}$ -ზე და $f/(1-F)$ არაკლებადია $\{x : 0 \leq F(x) < 1\}$ -ზე.

4.2 დახასიათებების დამტკიცება

თეორემა 2.2-ის დამტკიცება: 2.1 თეორემიდან გამომდინარე შეგვიძლია ყურადღება გავამახვილოთ ფუნქციაზე, რომელიც განსაზღვრულია $[X_1, X_n]$ -ზე და ლებულობს ნამდვილ მნიშვნელობებს, ასევე სიმრავლე, $\varphi := -\infty$, რომელიც განსაზღვრულია $R \setminus [X_1, X_n]$ -ზე. მსგავსი ფუნქციების C_n სიმრავლე არის ამოზნექილი კონუსი და ნებისმიერი $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციისთვის და $t > 0$ -თვის, $\varphi + t\Delta$ ფუნქციის ჩაზნექილობა $\mathbb{R}$ -ზე და მისი ჩაზნექილობა $[X_1, X_n]$ -ზე ექვივალენტურია.

ადვილად შესაძენია, რომ Ψ_n ჩაზნექილი ფუნქციაა და C_n -ზე ლებულობს ნამდვილ მნიშვნელობებს. აქედან გამომდინარე, როგორც კარგადაა ცნობილი ამოზნექილობის ანალიზიდან, $\tilde{\varphi} \in C_n$ ფუნქცია Ψ_n -ის მაქსიმიზაციას ახდენს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\Psi_n(\tilde{\varphi} + t(\varphi - \tilde{\varphi})) - \Psi_n(\tilde{\varphi})}{t} \leq 0$$

$\forall \varphi \in C_n$ -თვის, მაგრამ ეს ექვივალენტურია შემდეგი მოთხოვნის:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\Psi_n(\tilde{\varphi} + t\Delta) - \Psi_n(\tilde{\varphi})}{t} \leq 0$$

ნებისმიერი $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციისთვის, რომელიც $\tilde{\varphi} + \lambda\Delta$ არის ჩაზნექილი რაიმე $\lambda > 0$ -თვის. თეორემის მტკიცება მოჰყვება შემდეგს:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\Psi_n(\tilde{\varphi} + t\Delta) - \Psi_n(\tilde{\varphi})}{t} = \int \Delta dF_n - \int \Delta(x) \exp \tilde{\varphi}(x) dx$$

□

თეორემა 2.4-ის დამტკიცება: დავიწყეთ ზოგადი დაკვირვებით. ვთქვათ G არის რაიმე განაწილების (ფუნქცია) $[X_1, X_n]$ -ზე და ვთქვათ $\Delta : [X_1, X_n] \rightarrow \mathbb{R}$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია L_1 -წარმოდებულით Δ' . ფუბინის თეორემიდან გამომდინარე:

$$\int \Delta dG = \Delta(X_n) - \int_{X_1}^{X_n} \Delta'(r)G(r)dr \quad (5)$$

ახლა ვთქვათ, რომ $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_n$ და $t \in (X_1, X_n]$. ვთქვათ Δ არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია L_1 -წარმოდებულით $\Delta'(r) = 1\{r \leq t\}$ და $\Delta(X_n)$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობა. ცხადია, $\tilde{\varphi} + \Delta$ ჩაზნექილია, რადგან (2) და (5)-დან გამოდის რომ

$$\Delta(X_n) - \int_{X_1}^t F_n(r)dr \leq \Delta(X_n) - \int_{X_1}^t \tilde{F}(r)dr$$

რომელიც (3) უტოლობის ექვივალენტურია. იმ შემთხვევაში, როცა $t \in S_n(\tilde{\varphi}) \setminus \{X_1\}$, ვთქვათ $\Delta'(r) = -1\{r \leq t\}$, მაშინ, $\tilde{\varphi} + \Delta$ ჩაზნექილია რაიმე $\lambda > 0$ -თვის ამიტომ

$$\Delta(X_n) + \int_{X_1}^t \mathbb{F}_n(r) dr \leq \Delta(X_n) + \int_{X_1}^t \tilde{F}(r) dr$$

რომელიც გამოიწვევს ტოლობას (3)-ში.

ახლა ვთქვათ $\tilde{\varphi}$ აკმაყოფილებს (3) უტოლობას ნებისმიერი t -თვის ტოლობით თუ $t \in S_n(\tilde{\varphi})$. 2.1 და 2.2 თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარე საკმარისია ვახვეთ, რომ (2) სამართლიანია $[X_1, X_n]$ -ზე განსაზღვრული ნებისმიერი Δ ფუნქციისთვის, რომელიც წრფივია თითოეულ $[X_j, X_{j+1}]$, $1 \leq j < n$ ინტერვალზე, როცა $\tilde{\varphi} + \lambda\Delta$ ჩაზნექილია რაიმე $\lambda > 0$ -თვის. ბოლო მოთხოვნა ექვივალენტურია იმისა, რომ Δ იყოს ჩაზნექილი $\tilde{\varphi}$ -ს ორ მომდევნო კვანძს შორის. ელემენტარული მოსაზრებები აჩვენებენ, რომ Δ -ს მსგავსი ფუნქციის L_1 -წარმოებული შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$\Delta'(r) = \sum_{j=2}^n \beta_j 1\{r \leq X_j\}$$

ნამდვილი რიცხვებისთვის $\beta_2, \dots, \beta_n$ ისეთი რომ

$$\beta_j \geq 0 \quad \text{თუ} \quad X_j \notin S_n(\tilde{\varphi})$$

შესაბამისად, (5) და $\tilde{\varphi}$ -ის დაშვებებიდან გამომდინარე გვექნება:

$$\begin{aligned} \int \Delta d\mathbb{F}_n &= \Delta(X_n) - \sum_{j=2}^n \beta_j \int_{X_1}^{X_j} \mathbb{F}_n(r) dr \\ &\leq \Delta(X_n) - \sum_{j=2}^n \beta_j \int_{X_1}^{X_j} \tilde{F}(r) dr \\ &= \int \Delta d\tilde{F} \end{aligned}$$

□

2.5 შედეგის დამტკიცება: $t \in S_n(\hat{\varphi}_n)$ და $s < t < u$ -თვის 2.4 თეორემიდან გამომდინარე

$$\frac{1}{u-t} \int_t^u \hat{F}_n(r) dr \leq \frac{1}{u-t} \int_s^t \mathbb{F}_n(r) dr$$

და

$$\frac{1}{t-s} \int_s^t \hat{F}_n(r) dr \geq \frac{1}{t-s} \int_s^t \mathbb{F}_n(r) dr$$

თუ $u \downarrow t$ და $s \uparrow t$ მივიღებთ:

$$\hat{F}_n(t) \leq \mathbb{F}_n(t) \quad \text{და} \quad \hat{F}_n(t) \geq \mathbb{F}_n(t-) = \mathbb{F}_n(t) - n^{-1}$$

□

4.3 $\hat{\varphi}_n$ -ის ძალდებულობის დამტკიცება

ლემა 4.3.1. ნებისმიერი $\beta \in [1, 2]$ და $L > 0$ -თვის, არსებობს მუდმივი $K = K(\beta, L) \in (0, 1]$ შემდეგი თვისებებით. დავუშვათ, რომ g და $\hat{g}$ არიან ჩაზნექილი ფუნქციები, რომლებიც ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობენ $T = [A, B]$ კომპაქტურ ინტერვალზე, სადაც $g \in H^{\beta, L}(T)$. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ და $0 < \delta \leq K \min\{B - A, \varepsilon^{\frac{1}{\beta}}\}$. მაშინ:

$$\sup_{t \in T} (\hat{g} - g) \geq \varepsilon \quad \text{ან} \quad \sup_{t \in [A+\delta, B-\delta]} (g - \hat{g}) \geq \varepsilon$$

ეს გულისხმობს, რომ:

$$\inf_{t \in [c, c+\delta]} (\hat{g} - g)(t) \geq \varepsilon/4 \quad \text{ან} \quad \inf_{t \in [c, c+\delta]} (g - \hat{g})(t) \geq \varepsilon/4$$

რადგან $c \in [A, B - \delta]$.

თავდაპირველად მოკლედ აღწეროთ 3.1 თეორემის დამტკიცების იდეა.

ვთქვათ გვაქვს ზომად ფუნქციათა Δ სასრული სემინორმათა კლას D .

$$\sigma(\Delta) := \left(\int \Delta^2 dF \right)^{1/2}$$

ისეთი, რომ

$$\sup_{\Delta \in D} \frac{|\int \Delta d(\mathbb{F}_n - F)|}{\sigma(\Delta) \rho_n^{1/2}} \leq C \quad (6)$$

ასიმპტოტური აღბათობით ერთი, სადაც $C > 0$ რაიმე მუდმივია. თუ დამატებით $\varphi - \hat{\varphi}_n \in D$ და $\varphi - \hat{\varphi}_n \leq C$ ასიმპტოტური აღბათობით ერთი, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ :

$$\left| \int (\varphi - \hat{\varphi}_n) d(\mathbb{F}_n - F) \right| \leq C \sigma(\varphi - \hat{\varphi}_n) \rho_n^{1/2},$$

თუ 2.2 თეორემაში ჩავსვათ $\Delta := \varphi - \hat{\varphi}_n$ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \int (\varphi - \hat{\varphi}_n) d(\mathbb{F}_n - F) &\leq \int (\varphi - \hat{\varphi}_n) d(\hat{F} - F) \\ &= - \int \Delta (1 - \exp(-\Delta)) dF \\ &\leq -(1 + C)^{-1} \int \Delta^2 dF \\ &= -(1 + C)^{-1} \sigma(\varphi - \hat{\varphi}_n)^2 \end{aligned}$$

რადგანაც

$$y(1 - \exp(-y)) \geq (1 + y_+)^{-1} y^2$$

ყველა ნამდვილი y -თვის სადაც, $y_+ := \max(y, 0)$, აქედან გამომდინარე, ასიმპტოტური აღბათობით ერთი:

$$\sigma(\varphi - \hat{\varphi}_n)^2 \leq C^2 (1 + C)^2 \rho_n$$

ახლა ჩავთვალოთ, რომ $|\varphi - \hat{\varphi}_n| \geq \varepsilon_n$, $T = [A, B]$ ინტერვალის ქვეინტერვალზე, რომლის სიგრძეა $\varepsilon_n^{\frac{1}{\beta}}$, სადაც $(\varepsilon_n)_n$ ფიქსირებულ რიცხვთა მიმდევრობაა $\varepsilon_n > 0$ 0-თან ახლოს. მაშინ, $\sigma(\varphi - \hat{\varphi}_n)^2 \geq \varepsilon_n^{(2\beta+1)/\beta} \min_T(f)$, ამიტომ:

$$\varepsilon_n \leq \tilde{C} \rho_n^{2\beta/(2\beta+1)}$$

ჩინა მოსაზრებები შეიცვლება ორი ასპექტის მიხედვით, რათა მივიღოთ 3.1 თეორემის მკაცრი დამტკიცება. ტექნიკური მიზეზების გამო (6)-ში მნიშვნელი $\sigma(\Delta) \rho_n^{1/2}$ უნდა შევცვალოთ $\sigma(\Delta) \rho_n^{1/2} + W(\Delta) \rho_n^{2/3}$, ამიტომ

$$W(\Delta) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\Delta(x)|}{\max(1, |\varphi(x)|)}$$

აუცილებელია, რომ განვიხილოთ Δ ფუნქცია პატარა მნიშვნელობით $F(\{\Delta \neq 0\})$ -სა. უფრო მეტიც, ჩვენ ვიმუშავებთ $\varphi - \hat{\varphi}_n$ -ის მარტივ "კარიკატურაზე" კერძოდ, ფუნქციები, რომლებიც უბან-უბან წრფივია უმეტესად m კვანძებში, რაც ნიშნავს, რომ ნამდვილი ღერძი შეიძლება და-ნაწევრდეს $m+1$ არაგადაგვარებულ ინტერვალად, რომელზეც ფუნქცია წრფივია. მაშინ, ამ ინტერვალების m ნამდვილი შემოსაზღვრის წერტილები არიან კვანძები.

შემდეგი ლემა ვრცელდება (2) უტოლობაში გარკვეული წრფივი ფუნქციებისთვის.

ლემა 4.3.2. ვთქვათ $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ისეთი უბან-უბან წრფივი ფუნქცია, რომ ყველა Δ -ს q კვანძი აკმატოფილებს შემდეგი ორი თვისებიდან ერთს:

$$q \in S_n(\hat{\varphi}_n) \quad \text{და} \quad \Delta(q) = \liminf_{x \rightarrow q} \Delta(x) \quad (7)$$

$$\Delta(q) = \lim_{r \rightarrow q} \Delta(r) \quad \text{და} \quad \Delta'(q-) \geq \Delta'(q+). \quad (8)$$

მაშინ,

$$\int \Delta d\mathbb{F}_n \leq \int \Delta d\hat{F}_n \quad (9)$$

ახლა შეგვიძლია დავაზუსტოთ რას ნიშნავს "კარიკატურა" რომელიც ზემოთ ვახსენეთ.

ლემა 4.3.3. ვთქვათ $T = [A, B]$ არის $\{f > 0\}$ გულის ფიქსირებული ქვესიმრავლე. ვთქვათ $\varphi - \hat{\varphi}_n \geq \varepsilon$ ან $\hat{\varphi}_n - \varphi \geq \varepsilon$ რაიმე $[c, c + \delta] \subset T$ ინტერვალზე, რომლის სიგრძეა $\delta > 0$ და ჩავთვალოთ, რომ $X_1 < c$ და $X_n > c + \delta$, მაშინ არსებობს უბან-უბან წრფივი ფუნქცია Δ არაუმეტეს სამ კვანძში. თითოეული მათგანი აკმატოფილებს (7) ან (8) პირობებს და დადებითი კონსტანტა $K' = K'(f, T)$ ისეთი, რომ

$$|\varphi - \hat{\varphi}_n| \geq \varepsilon |\Delta| \quad (10)$$

$$\Delta(\varphi - \hat{\varphi}_n) \geq 0 \quad (11)$$

$$\Delta \leq 1 \quad (12)$$

$$\int_c^{c+\delta} \Delta d\mathbb{F}_n \geq \int \Delta d\hat{F}_n \quad (13)$$

$$W(\Delta) \leq K' \delta^{-1/2} \sigma(\Delta) \quad (14)$$

ლემა 4.3.4. ვთქვათ, D_m არის ყველა უბან-უბან წრფივი ფუნქციათა კლასი $\mathbb{R}$ -ზე არაუმეტეს m კვანძით. მაშინ არსებობს მუდმივი $K'' = K''(f)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{m \geq 1, \Delta \in D_m} \frac{|\int \Delta d(\mathbb{F}_n - F)|}{\sigma(\Delta) m^{1/2} \rho_n^{1/2} + W(\Delta) m \rho_n^{2/3}} \leq K''$$

აფასებს ლოგარითმულად ჩაზნეჟილ სიმკვრივეებს ალბათობით 1, როცა $n \rightarrow \infty$.

3.1 თეორემის დამტკიცება: ვთქვათ, რომ

$$\sup_{t \in T} (\hat{\varphi}_n - \varphi)(t) \geq C \varepsilon_n$$

ან

$$\sup_{t \in [A+\delta_n, B-\delta_n]} (\varphi - \hat{\varphi}_n)(t) \geq C \varepsilon_n$$

რაიმე $C > 0$ მუდმივისთვის, სადაც $\varepsilon_n := \rho_n^{\beta/(2\beta+1)}$ და $\delta_n := \rho_n^{1/(2\beta+1)} = \varepsilon_n^{1/\beta}$. ეს გამომდინარეობს ლემა 4.3.1-დან, როცა $\varepsilon := C \varepsilon_n$ იმ შემთხვევაში, როცა $C \geq K^{-\beta}$ და საკმარისად დიდი n -თვის, არსებობს (შემთხვევითი) ინტერვალი $[c_n, c_n + \delta_n] \subset T$ რომელზეც ან $\hat{\varphi}_n - \varphi \geq (C/4) \varepsilon_n$ ან $\varphi - \hat{\varphi}_n \geq (C/4) \varepsilon_n$. მაგრამ, მაშინ არსებობს (შემთხვევითი) ფუნქცია $\Delta_n \in D_3$, რომელიც ასრულებს ლემა 4.3.3-ში მოცემულ პირობებს Δ_n -თვის, შემდეგ გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{\mathbb{R}} \Delta_n d(F - \mathbb{F}_n) \geq \int_{\mathbb{R}} \Delta_n d(F - \hat{F}_n) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_n (1 - \exp[-(\varphi - \hat{\varphi}_n)]) dF \quad (15)$$

სადაც, $\tilde{\Delta}_n := (C/4) \varepsilon_n \Delta_n$, (10,11) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ (15) ტოლობის მარჯვენა მხარე არაა მცირე ვიდრე:

$$(4/C) \varepsilon_n^{-1} \int \tilde{\Delta}_n (1 - \exp(-\tilde{\Delta}_n)) dF \geq \frac{(4/C) \varepsilon_n^{-1}}{1 + (C/4) \varepsilon_n} \sigma(\tilde{\Delta}_n)^2 = \frac{(C/4) \varepsilon_n}{1 + o(1)} \sigma(\Delta_n)^2$$

რადგან $\tilde{\Delta}_n \leq (C/4) \varepsilon_n$, (12) უტოლობიდან. მეორე მხრივ, (4.3.4) ლემის დაყრდნობით შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Delta_n d(F - \mathbb{F}_n) &\leq K'' (3^{1/2} \sigma(\Delta_n) \rho_n^{1/2} + 3W(\Delta_n) \rho_n^{2/3}) \\ &\leq K'' (3^{1/2} \rho_n^{1/2} + 3K' \delta_n^{-1/2} \rho_n^{2/3}) \sigma(\Delta_n) \\ &\leq K'' (3^{1/2} \rho_n^{1/2} + 3K' \rho_n^{2/3-1/(4\beta+2)}) \sigma(\Delta_n) \\ &\leq G \rho_n^{1/2} \sigma(\Delta_n) \end{aligned} \quad (16)$$

რაიმე $G = G(\beta, L, f, T)$ მუდმივისთვის, რადგან $2/3 - 1/(4\beta+2) \geq 2/3 - 1/6 = 1/2$. შესაბამისად:

$$C^2 \leq \frac{16G^2(1+o(1))\varepsilon_n^{-2}\rho_n}{\sigma(\Delta_n)^2} = \frac{16G^2(1+o(1))}{\delta_n^{-1}\sigma(\Delta_n)^2} \leq \frac{48G^2(1+o(1))}{\min_T(f)}$$

ბოლო უტოლობა, (13) უტოლობიდან გამომდინარეობს. $\square$

4.3.2 ლემის დამტკიცება: არსებობს Δ_k უწყვეტი, უბან-უბან წრფივი ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც იზოტონურად წერტილოვნად მიისწრაფის Δ -სკენ, როცა $k \rightarrow \infty$. Δ_k -ს ნებისმიერი q კვანძი ან $S_n(\hat{\varphi}_n)$ -ს ეკუთვნის, ან $\Delta'_k(q-) > \Delta'_k(q+)$. აქედან გამომდინარე, $\hat{\varphi}_n + \lambda \Delta_k$ ჩაზნექილია, საკმარისად პატარა $\lambda > 0$ -თვის. შესაბამისად, როცა $\Delta_1 \leq \Delta_k \leq \Delta$ ნებისმიერი k -თვის, დომინანტური კრებადლობისა და (2) უტოლობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$\int \Delta dF_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \Delta_k dF_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \Delta_k d\hat{F}_n = \int \Delta d\hat{F}_n$$

□

4.3.3 ლემის დამტკიცება: ყველა განხილული შემთხვევიდან გამომდინარე, გადამწყვეტია ავაგოთ $\Delta \in D_3$, რომელიც აკმაყოფილებს 4.3.2. ლემასა და (10-13) უტოლობებს. გავისხსენოთ, რომ $\hat{\varphi}_n$ უბან-უბან წრფივი ფუნქციაა.

შემთხვევა 1 (ა:). $\hat{\varphi}_n - \varphi \geq \varepsilon$ $[c, c + \delta]$ -ზე და $S_n(\hat{\varphi}_n) \cap (c, c + \delta) \neq \emptyset$. აქ ჩვენ ვირჩევთ უწყვეტ $\Delta \in D_3$ ფუნქციას $c, c + \delta$ კვანძებითა და $x_0 \in S_n(\hat{\varphi}_n) \cap (c, c + \delta)$, სადაც $\Delta := 0$ $(-\infty, c] \cup [c + \delta, \infty)$ -ზე და $\Delta(x_0) := -1$. აქ 4.3.2 ლემის დაშვებები და (10-13) ადვილად მოწმდება.

(ბ:) $\hat{\varphi}_n - \varphi \geq \varepsilon$ $[c, c + \delta]$ -ზე და $S_n(\hat{\varphi}_n) \cap (c, c + \delta) \neq \emptyset$. ვთქვათ $[c_0, d_0] \supset [c, c + \delta]$ არის მაქსიმალური ინტერვალი, რომელზეც $\varphi - \hat{\varphi}_n$ ჩაზნექილია. მაშინ, არსებობს $\tilde{\Delta}$ წრფივი ფუნქცია ისეთი, რომ $\tilde{\Delta} \geq \varphi - \hat{\varphi}_n$ $[c_0, d_0]$ -ზე და $\Delta \leq -\varepsilon$ $[c, c + \delta]$ -ზე. შემდეგ, ვთქვათ, $(c_1, d_1) := \{\tilde{\Delta} < 0\} \cap (c_0, d_0)$. ახლა განვსაზღვროთ $\Delta \in D_2$, როგორც:

$$\Delta(x) := \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \in (-\infty, c_1) \cup (d_1, \infty) \\ \tilde{\Delta}/\varepsilon, & \text{თუ } x \in [c_1, d_1] \end{cases}$$

აქაც, 4.3.2 ლემის დაშვებები და (10-13) მარტივად მოწმდება. ამ დროს ჩვენ უკვე ვიცით, რომ $\Delta \leq -1$ $[c, c + \delta]$ -ზე საიდანაც $\int_c^{c+\delta} \Delta(x)^2 dx \geq \delta$. მე-3 ნახაზზე ილუსტრირებულია ეს კონსტრუქცია.

შემთხვევა 2. $\hat{\varphi}_n - \varphi \geq \varepsilon$ $[c, c + \delta]$ -ზე. ვთქვათ $[c_0, c]$ და $[c + \delta, d_0]$ არიან მაქსიმალური ინტერვალები, რომლებზეც $\hat{\varphi}_n$ ფუნქცია წრფივია. მაშინ, განვსაზღვროთ:

$$\Delta(x) := \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \in (-\infty, c_0) \cup (d_0, \infty), \\ 1 + \beta_1(x - x_0), & \text{თუ } x \in [c_0, x_0], \\ 1 + \beta_2(x - x_0), & \text{თუ } x \in [x_0, d_0], \end{cases}$$

სადაც $x_0 := c + \delta/2$ და $\beta_1 \geq 0$ ისე არიან შერჩეულები, რომ ან

$$\Delta(c_0) = 0 \quad \text{და} \quad (\varphi - \hat{\varphi})(c_0) \geq 0, \quad \text{ან}$$

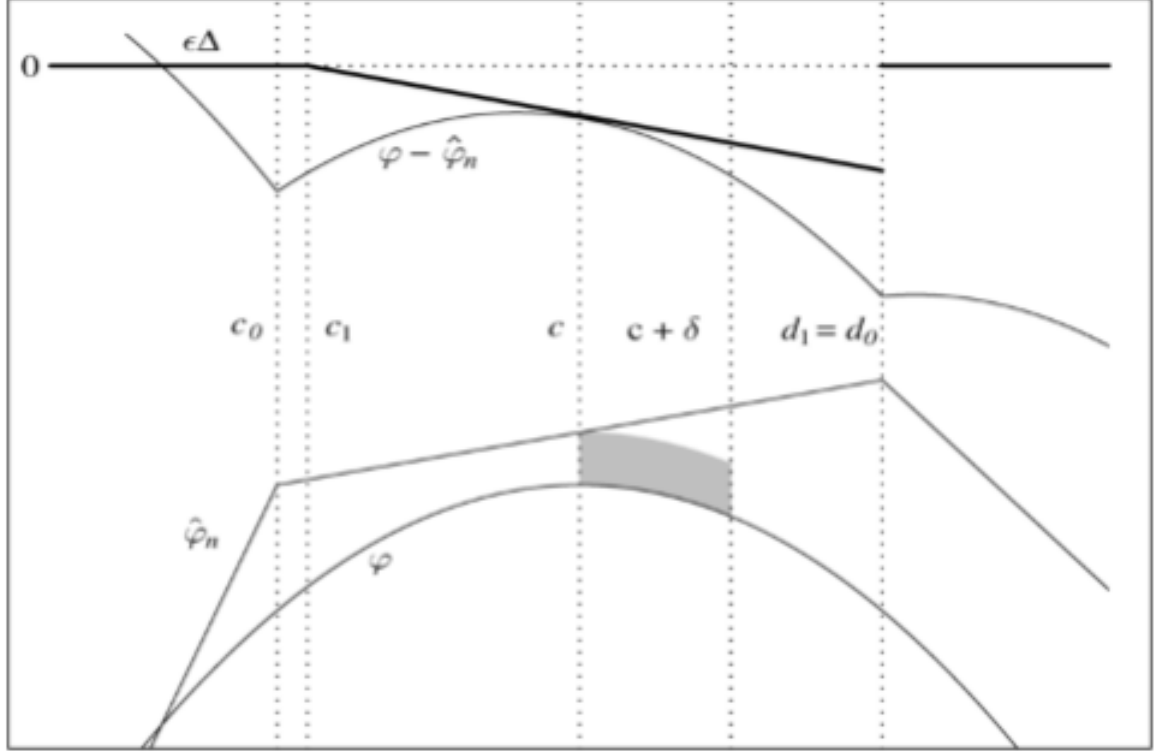
$$(\varphi - \hat{\varphi}_n)(c_0) < 0 \quad \text{და} \quad \text{sign}(\Delta) = \text{sign}(\varphi - \hat{\varphi}_n) \quad [x_0, d_0]\text{-ზე.}$$

ანალოგიურად, $\beta_2 \leq 0$ ისეა შერჩეული, რომ

$$\Delta(d_0) = 0 \quad \text{და} \quad (\varphi - \hat{\varphi}_n)(d_0) \geq 0, \quad \text{აბ}$$

$$(\varphi - \hat{\varphi}_n)(d_0) < 0 \quad \text{აბ} \quad \text{sign}(\Delta) = \text{sign}(\varphi - \hat{\varphi}_n) \quad [x_0, d_0]\text{-ზე.}$$

აქაც, 4.3.2 ლემის დაშვებები და (10-13) ადვილად მოწმდება. მე-4 ნახაზზე ასახულია მაგალითი.



ნახაზი 3: Δ ფუნქცია (ბ) შემთხვევაში.

დაგვრჩა, რომ შევამოწმოთ, (14) მოთხოვნა ჩვენი კონკრეტული Δ ფუნქციისთვის. ავლენიშნოთ, რომ ჩვენი დაშვებებიდან $T = [A, B]$ ინტერვალზე არსებობს ისეთი $\tau, C_0 > 0$ რიცხვები, რომ $f \geq C_0$ $T_0 := [A - \tau, B + \tau]$ ინტერვალზე.

(ა) შემთხვევაში, $W(\Delta) \leq \|\Delta\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = 1$, როცა $\sigma(\Delta)^2 \geq C_0 \int_c^{c+\delta} \Delta(x)^2 dx = C_0 \delta^2 / 3$. აქედან გამომდინარე, (14) დაკმაყოფილებულია, თუ $K' \geq (3/C_0)^{1/2}$.

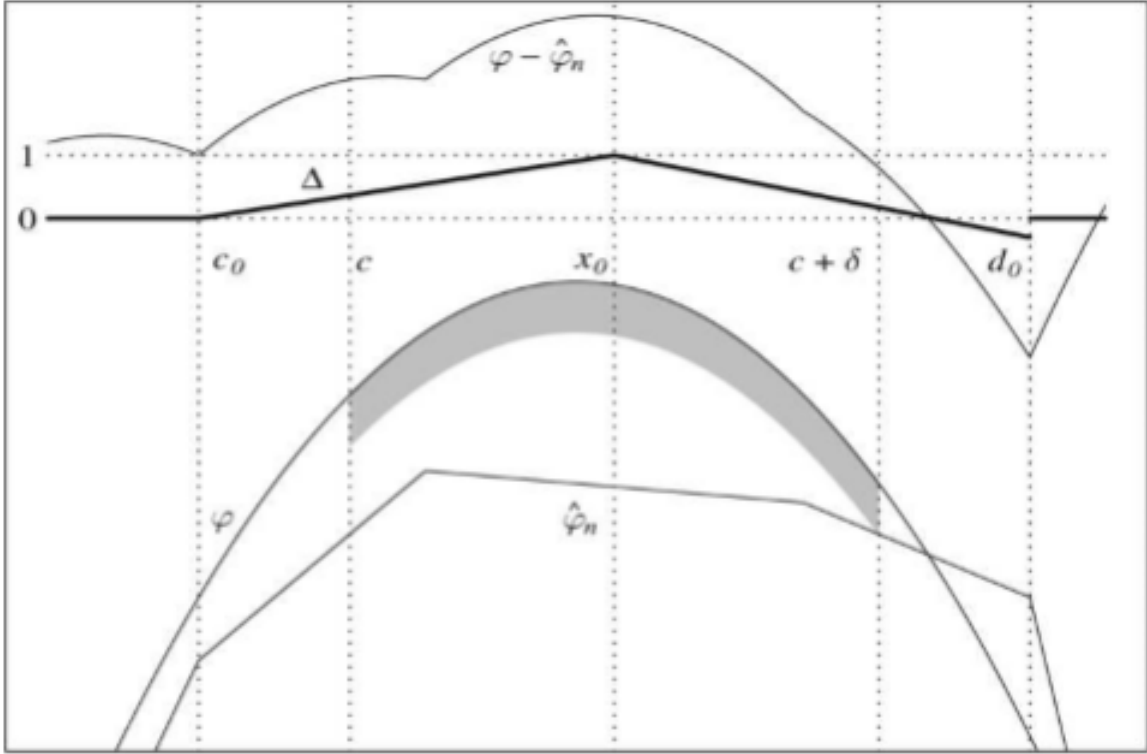
(ბ) და (2) შემთხვევებისთვის დაგიწებთ უფრო ზოგად განხილვას. ვთქვათ $h(x) := 1\{x \in Q\}(\alpha + \gamma x)$ ნებისმიერი ნამდვილი α, γ რიცხვებისა და არაგადაგვარებული Q ინტერვალისათვის, რომელიც შეიცავს რამდენიმე წერტილს $(c, c + \delta)$ -დან. ვთქვათ $Q \cap T_0$ -ს ბოლოები $x_0 < y_0$ წერტილებში აქვს. ელემენტარული განხილვები აჩვენებს, რომ

$$\sigma(h)^2 \geq C_0 \int_{x_0}^{y_0} (\alpha + \gamma x)^2 dx \geq \frac{C_0}{4} (y_0 - x_0) (\|h\|_{\infty}^{T_0})^2.$$

ახლა გამოვიყვანოთ, $W(h) / \|h\|_{\infty}^{T_0}$ -ს ზედა საზღვარი. თუ $Q \subset T_0$ ან $\gamma = 0$, მაშინ $W(h) / \|h\|_{\infty}^{T_0} \leq 1$. ახლა დავუშვათ, რომ $\gamma \neq 0$ და $Q \not\subset T_0$. ახლა ისეთი $x_0, y_0 \in T_0$, რომლებიც

აკამყოფილებენ $y_0 - x_0 \geq \tau$ პირობას, ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ $\gamma = -1$. ახლა

$$\begin{aligned} \|h\|_\infty^{T_0} &= \max(|\alpha - x_0|, |\alpha - y_0|) \\ &= (y_0 - x_0)/2 + |\alpha - (x_0 + y_0)/2| \\ &\geq \tau/2 + |\alpha - (x_0 + y_0)/2|. \end{aligned}$$



ნა-

ზაზი 4: Δ ფუნქცია (2) შემთხვევაში.

მეორე მხრივ, როცა $a_0, b_0 > 0$ კონკრეტული წერტილებისთვის $\varphi(x) \leq a_0 - b_0|x|$,

$$\begin{aligned} W(h) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\alpha - x|}{\max(1, b_0|x| - a_0)} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\alpha| + |x|}{\max(1, b_0|x| - a_0)} \\ &= |\alpha| + (a_0 + 1)/b_0 \\ &\leq |\alpha - (x_0 + y_0)/2| + (|A| + |B| + \tau)/2 + (a_0 + 1)/b_0. \end{aligned}$$

ეს მოიცავს

$$\frac{W(h)}{\|h\|_\infty^{T_0}} \leq C_* := \frac{(|A| + |B| + \tau)/2 + (a_0 + 1)/b_0}{\tau/2}.$$

(ბ) შემთხვევაში ჩვენი Δ ფუნქცია იმავე ტიპისაა რაც h და $y_0 - x_0 \geq \delta$. მაშინ,

$$W(\Delta) \leq C_* \|h\|_\infty^{T_0} \leq 2C_* C_0^{-1/2} \delta^{-1/2} \sigma(\Delta).$$

(2) შემთხვევაში Δ შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც $h_1 + h_2$, ორი h_1 და h_2 ფუნქციებით, რომლებიც

იმავე ტიპის არიან რაც h და აკმაყოფილებენ $y_0 - x_0 \geq \sigma/2$ უტოლობას. აქედან გამომდინარე:

$$\begin{aligned} W(\Delta) &= \max(W(h_1), W(h_2)) \\ &\leq 2^{3/2} C_* C_0^{-1/2} \delta^{-1/2} \max(\sigma(h_1), \sigma(h_2)) \\ &\leq 2^{3/2} C_* C_0^{-1/2} \delta^{-1/2} \sigma(\Delta). \end{aligned}$$

□

იმისათვის რომ დავამტკიცოთ 4.3.4 ლემა გვჭირდება მარტივი ექპონენციალური უტოლობა.

ლემა 4.1. *დავუშვათ, რომ Y არის შემთხვევითი სიდიდე, ისეთი რომ $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{E}(Y^2) = \sigma^2$ და $C := \mathbb{E} \exp(|Y|) < \infty$. მაშინ, ნებისმიერი $t \in \mathbb{R}$ -თვის,*

$$\mathbb{E} \exp(tY) \leq 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{C|t|^3}{(1-|t|)_+}.$$

დამტკიცება.

$$\mathbb{E} \exp(tY) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}(Y^k) \leq 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \mathbb{E}(|Y|^k)$$

ნებისმიერი $y \geq 0$ და მთელი $k \geq 3$, $y^k e^{-y} \leq k^k e^{-k}$ რიცხვებისთვის. აქედან გამომდინარე, $\mathbb{E}(|Y|^k) \leq \mathbb{E} \exp(|Y|) k^k e^{-k} = C k^k e^{-k}$. რადგანაც $k^k e^{-k} \leq k!$, რომელიც ადვილად მტკიცდება ინდუქციით k -ზე, მაშინ:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \mathbb{E}(|Y|^k) \leq C \sum_{k=3}^{\infty} |t|^k = \frac{C|t|^3}{(1-|t|)_+}$$

□

4.1 ლემა სამართლიანია სასრულ ფუნქციათა ოჯახებისთვისაც.

ლემა 4.2. *ვთქვათ H_n არის სასრულ h ფუნქციათა ოჯახი რომლისთვისაც $0 < W(h) < \infty$ ისეთი, რომ $\#H_n = O(n^p)$ რაიმე $p > 0$ -თვის. მაშინ, საკმარისად დიდი D -თვის,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{h \in H_n} \frac{|\int h d(\mathbb{F}_n - F)|}{\sigma(h) \rho_n^{1/2} + W(h) \rho_n^{2/3}} \geq D \right) = 0.$$

დამტკიცება. რადგან ნებისმიერი $h \in H_n$ -თვისა და ნებისმიერი $c > 0$ -თვის $W(ch) = cW(h)$ და $\sigma(ch) = c\sigma(h)$, ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $W(h) = 1$ ყველა $h \in H_n$ -თვის. ვთქვათ, X არის შემთხვევითი სიდიდე φ ; ლოგ-სიმკვრივით. მაშინ,

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} < 0.$$

4.1.1 ლემის თანახმად, $\exp(t_0 \omega(X))$ სასრულია ყველა ფიქსირებულ $t_0 \in (0, 1)$ -თვის, სადაც $\omega(x) := \max(1, |\varphi(x)|)$, აქედან გამომდინარე,

$$\mathbb{E} \exp(t_0 |h(X) - \mathbb{E}h(X)|) \leq C_0 := \exp(t_0 \mathbb{E}\omega(X)) \mathbb{E} \exp(t_0 \omega(X)) < \infty.$$

თუ 4.1 ლემაში $Y := t_0(h(x) - \mathbb{E}h(X))$, მაშინ

$$\mathbb{E} \exp[t(h(X) - \mathbb{E}h(X))] = \mathbb{E}((t/t_0)Y) \leq 1 + \frac{\sigma(h)^2 t^2}{2} + \frac{C_1 |t|^3}{(1 - C_2 |t|)_+}$$

ნებისმიერი $h \in H_n, t \in \mathbb{R}$ და მუდმივი C_1, C_2 -თვის, რომლებიც დამოკიდებულია არიან t_0 -სა და C_0 -ზე. შესაბამისად:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left(t \int hd(\mathbb{F}_n - F) \right) &= \mathbb{E} \exp \left((t/n) \sum_{i=1}^n (h(X_i) - \mathbb{E}h(X)) \right) \\ &= (\mathbb{E} \exp((t/n)(h(X) - \mathbb{E}h(X))))^n \\ &\leq \left(1 + \frac{\sigma(h)^2 t^2}{2n^2} + \frac{C_1 |t|^3}{n^3(1 - C_2 |t|/n)_+} \right)^n \\ &\leq \exp \left(\frac{\sigma(h)^2 t^2}{2n} + \frac{C_1 |t|^3}{n^2(1 - C_2 |t|/n)_+} \right) \end{aligned}$$

მარკოვის უტოლობას მოჰყვება შემდეგი:

$$\mathbb{P} \left(\left| \int hd(\mathbb{F}_n - F) \right| \geq \eta \right) \leq 2 \exp \left(\frac{\sigma(h)^2 t^2}{2n} + \frac{C_1 t^3}{n^2(1 - C_2 t/n)_+} - t\eta \right) \quad (17)$$

ნებისმიერი $t, \eta > 0$ -თვის. კონკრეტულად, ვთქვათ $\eta = D(\sigma(h)\rho_n^{1/2} + \rho_n^{2/3})$ და

$$t := \frac{n\rho_n^{1/2}}{\sigma(h) + \rho_n^{1/6}} \leq n\rho_n^{1/3} = o(n).$$

მაშინ, საზღვარი (17) არ არის დიდი ვიდრე:

$$\begin{aligned} &2 \exp \left(\frac{\sigma(h)^2 \log n}{2(\sigma(h) + \rho_n^{1/6})^2} + \frac{C_1 \rho_n^{1/2} \log n}{(\sigma(h) + \rho_n^{1/6})^3(1 - C_2 \rho_n^{1/3})_+} - D \log n \right) \\ &\leq 2 \exp \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{C_1}{(1 - C_2 \rho_n^{1/3})_+} - D \right) \log n \right] = 2 \exp((O(1) - D) \log n). \end{aligned}$$

შესაბამისად, საკმარისად დიდი $D > 0$ -თვის,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(\max_{h \in H_n} \frac{|\int hd(\mathbb{F}_n - F)|}{\sigma(h)\rho_n^{1/2} + W(h)\rho_n^{2/3}} \geq D \right) \\ &\leq \#H_n 2 \exp((O(1) - D) \log n) = O(1) \exp((O(1) + p - D) \log n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

4.3.4 ლემის დამტკიცება: ვთქვათ H არის ყველა h ფუნქციათა ოჯახი, სადაც

$$h(x) = 1\{x \in Q\}(c + dx),$$

ნებისმიერი $Q \subset \mathbb{R}$ ინტერვალისთვის და c, d ნამდვილი მუდმივებისთვის, ისეთების რომ h არაუარყოფითია. ვიგულისმობთ, რომ არსებობს $C = C(f)$ მუდმივი ისეთი, რომ:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{h \in H} \frac{|\int hd(\mathbb{F}_n - F)|}{\sigma(h)\rho_n^{1/2} + W(h)\rho_n^{2/3}} \leq C \right) \rightarrow 1 \quad (18)$$

ნებისმიერი $m \in \mathbb{N}$ -თვის, ნებისმიერი $\Delta \in D_m$ შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\Delta = \sum_{i=1}^M h_i$$

სადაც $M = 2m + 2$ და $h_i \in H$ ფუნქციებს აქვთ წყვილ-წყვილად არათანამკვეთი მზიდები, შესაბამისად,

$$\sigma(\Delta) = \left(\sum_{i=1}^M \sigma(h_i)^2 \right)^{1/2} \geq M^{-1/2} \sum_{i=1}^M \sigma(h_i),$$

კოში-შვარცის უტოლობიდან, როცა

$$W(\Delta) = \max_{i=1, \dots, M} W(h_i) \geq M^{-1} \sum_{i=1}^M W(h_i).$$

შესაბამისად, (18) გულისხმობს, რომ

$$\begin{aligned} \left| \int \Delta d(\mathbb{F}_n - F) \right| &\leq \sum_{i=1}^M \left| \int h_i d(\mathbb{F}_n - F) \right| \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^M \sigma(h_i) \rho_n^{1/2} + \sum_{i=1}^M W(h_i) \rho_n^{2/3} \right) \\ &\leq 4C(\sigma(\Delta) m^{1/2} \rho_n^{1/2} + W(\Delta) m \rho_n^{2/3}) \end{aligned}$$

თანაბრად $m \in \mathbb{N}$ -ში და $\Delta \in D_m$, ალბათობით რომელიც მიისწრაფის ერთისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

დაგვრჩა შევამოწმოთ (18) უტოლობა. ეს რომ დასრულდეს, ვიყენებთ ბრჩხილებში არგუმენტს. სიმძიმის ფუნქციით $\omega(x) = \max(1, |\varphi(x)|)$, ვთქვათ $-\infty = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,N(n)} = \infty$, ისეთი, რომ $I_{n,j} := (t_{n,j-1}, t_{n,j}]$,

$$(2n)^{-1} \leq \int_{I_{n,j}} \omega(x)^2 f(x) dx \leq n^{-1} \quad 1 \leq j \leq N(n) \text{თვის,}$$

ტოლობით თუ $j < N(n)$. როცა $N(n) = O(n)$, მაშინ $1 \leq \int \exp(t_0 \omega(x)) f(x) dx < \infty$, ნებისმიერი $h \in H$, განვსაზღვროთ ფუნქცია $h_{n,l}, h_{n,u}$ შემდეგნაირად: ვთქვათ $\{j, \dots, k\}$ არის ყველა ინდექსთა სიმრავლე $i \in \{1, \dots, N(n)\}$ ისეთი, რომ $\{h > 0\} \cap I_{n,j} \neq \emptyset$. მაშინ განვსაზღვროთ

$$h_{n,l}(x) := 1_{\{t_{n,j} < x \leq t_{n,k-1}\}} h(x)$$

და

$$h_{n,u} := h_{n,l}(x) + 1_{\{x \in I_{n,j} \cap I_{n,k}\}} W(h) \omega(x).$$

შევნიშნოთ, რომ $0 \leq h_{n,l} \leq h \leq h_{n,u} \leq W(h) \omega$. შესაბამისად $W(h_{n,l}) \leq W(h) = W(h_{n,u})$. ამ მომენტისთვის, ვიგულისხმობთ, რომ ეს დაშვება სამართლიანია (ისევ უსასრულო) $H_n :=$

$\{h_{n,l}, h_{n,u} : h \in H\}$ ოჯახისთვის H -ს ადგილას. შემდეგ ამას მოჰყვება, რომ $\omega \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int h d(\mathbb{F}_n - F) &\leq \int h_{n,u} d\mathbb{F}_n - \int h_{n,l} dF \\
&= \int h_{n,u} d(\mathbb{F}_n - F) + \int (h_{n,u} - h_{n,l}) dF \\
&\leq \int h_{n,u} d(\mathbb{F}_n - F) + W(h) \int_{I_{n,j} \cup I_{n,l}} \omega(x)^2 dF \\
&\leq \int h_{n,u} d(\mathbb{F}_n - F) + 2W(h)n^{-1} \\
&\leq C(\sigma(h_{n,u})\rho_n^{1/2} + \rho_n^{2/3}) + 2n^{-1} \\
&\leq C(\sigma(h)\rho_n^{1/2} + 2^{1/2}W(h)n^{-1/2}\rho_n^{1/2} + \rho_n^{2/3}) + 2W(h)n^{-1} \\
&\leq (C + o(1))(\sigma(h)\rho_n^{1/2} + W(h)\rho_n^{2/3}),
\end{aligned}$$

ასიმპტოტური აღბათობით ერთი, თანაბრად $h \in H$. ანალოგიურად:

$$\begin{aligned}
\int h d(\mathbb{F}_n - F) &\geq \int h_{n,l} d(\mathbb{F}_n - F) - 2W(h)n^{-1} \\
&\geq -C(\sigma(h_{n,l})\rho_n^{1/2} + W(h)\rho_n^{2/3}) - 2W(h)n^{-1} \\
&\geq -(C + o(1))(\sigma(h)\rho_n^{1/2} + W(h)\rho_n^{2/3}),
\end{aligned}$$

ასიმპტოტური აღბათობით ერთი, თანაბრად $h \in H$.

4.2 ლემის თანახმად ახლა უნდა გავერკვეთ H_n -ში. ნებისმიერი $h \in H$ -თვის $h_{n,l}$ ფუნქცია შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს :

$$h(t_{n,j})g_{n,j,k}^{(1)} + h(t_{n,k-1})g_{n,j,k}^{(2)},$$

"სამკუთხედის ფუნქციით":

$$g_{n,j,k}^{(1)}(x) := \frac{t_{n,k-1} - x}{t_{n,k-1} - t_{n,j}}$$

და

$$g_{n,j,k}^{(2)}(x) := \frac{x - t_{n,j}}{t_{n,k-1} - t_{n,j}} \quad 1 \leq j < k \leq N(n), k - j \geq \text{თვის.}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $k - j \leq 1$, მაშინ $g_{n,j,k}^{(1)} := g_{n,j,k}^{(2)} := 0$. უფრო მეტიც:

$$h_{n,u} = h_{n,l} + W(h)g_{n,j} + 1\{k > j\}W(h)g_{n,k}$$

ზადაც $g_{n,i}(x) := 1\{x \in I_{n,i}\}\omega(x)$. შესაბამისად, ყველა H_n -ს ფუნქცია არაუმეტეს ოთხი ფუნქციის წრფივი კომბინაციაა არაუარტოფითი კოეფიციენტებით სასრული ოჯახიდან.

$$\mathcal{G}_n := \{g_{n,i} : 1 \leq i \leq N(n)\} \cup \{g_{n,j,k}^{(1)}, g_{n,j,k}^{(2)} : 1 \leq j < k \leq N(n)\}.$$

რადგანაც $\mathcal{G}_n$ შეიცავს $O(n^2)$ ფუნქციებს, ლემა 4.2-ის თანახმად რაიმე $D > 0$ მუდმივისთვის

$$\left| \int g d(\mathbb{F}_n - F) \right| \leq D(\sigma(g)\rho_n^{1/2} + W(g)\rho_n^{2/3})$$

ყველა $g \in \mathcal{G}_n$ ფუნქციისთვის ასიმბტოტური ალბათობით ერთი. H_n -ზე მტკიცებები გამომდინარეობს ძირითადი დაკვირვებებიდან, რომ $h = \sum_{i=1}^4 \alpha_i g_i$ არაუარყოფითი g_i ფუნქციითა და $\alpha_i \geq 0$ კოეფიციენტებით,

$$\begin{aligned}\sigma(h) &\geq \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \sigma(g_i)^2 \right)^{1/2} \geq 2^{-1} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \sigma(g_i), \\ W(h) &\geq \max_{i=1, \dots, 4} \alpha_i W(g_i) \geq 4^{-1} \sum_{i=1}^4 \alpha_i W(g_i).\end{aligned}$$

□

5 $\hat{F}_n$ -ის ძალდებულობის მტკიცება

თეორემა 3.3-ის დამტკიცება: ვთქვათ $\delta_n := \rho_n^{1/(2\beta+1)}$ და $r_n := D\rho_n^{\beta/(4\beta+2)} = D\delta_n^{1/2}$ რაიმე $D > 0$ მუდმივისთვის. რადგანაც, $r_n \rightarrow 0$ მაგრამ $nr_n \rightarrow \infty$, f -ის შემოსაზღვრულობიდან და შტუცეს ერთგანზომილებიანი ემპირიული პროცესების უწყვეტობის მოდულის შესახებ თეორეტიკიდან [26] გამომდინარე

$$\begin{aligned}\omega_n &:= \sup_{x, y \in \mathbb{R}: |x-y| \leq r_n} |(\mathbb{F}_n - F)(x) - (\mathbb{F}_n - F)(y)| \\ &= O_p(n^{-1/2} r_n^{1/2} \log(1/r_n)^{1/2}) \\ &= O_p(\rho_n^{(5\beta+2)/(8\beta+4)}).\end{aligned}$$

თუ D საკმარისად დიდია, მაშინ ასიმბტოტური ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერი $x \in [A + \delta_n, B - \delta_n]$ წერტილისთვის არსებობს $y \in S_n(\hat{\varphi}_n) \cap [a + \delta_n, B - \delta_n]$ წერტილი, სადაც $|x - y| \leq r_n$, უდრის ერთს. 3.1 თეორეტიკიდან და 2.5 შედეგიდან გამომდინარე:

$$\begin{aligned}|(\hat{F}_n - \mathbb{F}_n)(x)| &\leq |(\hat{F}_n - \mathbb{F}_n)(x) - (\hat{F}_n - F)(y)| + n^{-1} \\ &\leq |(\hat{F}_n - F)(x) - (\hat{F}_n - F)(y)| + \omega_n + n^{-1} \\ &\leq \int_{\min(x, y)}^{\max(x, y)} |\hat{f}_n - f|(x) dx + \omega_n + n^{-1} \\ &\leq O_p(r_n \rho_n^{\beta/(2\beta+1)}) + \omega_n + n^{-1} \\ &= O_p(\rho_n^{3\beta/(4\beta+2)}).\end{aligned}$$

□

6 $\hat{\varphi}'_n$ -ის ძალდებულების დამტკიცება L_2 სივრცეში

3.1 თეორეტიკიდან გამომდინარე ისეთი $[A, B]$ ინტერვალისთვის, რომელიც $\{f > 0\}$ გულს ეკუთვნის არსებობს ისეთი $c > 0$ რაიმე მუდმივი რომ $T = [A - 2c, B + 2c]$ ქვესიმრავლეზე

სამართლიანია:

$$\max_{t \in [A-c, B+c]} (\widehat{\varphi}_n - \varphi)(t) = O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)}) \quad (19)$$

$$\max_{t \in [A-2c, B+2c]} (\varphi - \widehat{\varphi}_n)(t) = O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)}) \quad (20)$$

თეორემა 6.1. *NPMLE (მაქსიმალური დასაჯერობის არაპარამეტრული შეფასების) $\widehat{\varphi}_n(x)$ -ის მარცხენა წარმოებული $\widehat{\varphi}'_n(x-)$ წარმოადგენს $\varphi'(x-)$ -ის ძალდებულ შეფასებას L_2 სივრცეში:*

$$\int_A^B (\widehat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \xrightarrow{p} 0, \quad \text{როცა } n \rightarrow \infty, \quad (21)$$

სადაც $[A, B]$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ნებისმიერ კომპაქტურ ინტერვალს.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ ორი ჩაზნექილი ფუნქციის წარმოებული სხვაობის L_2 ნორმის შეფასება ამ ჩაზნექილი ფუნქციების სხვაობის თანაბარი ნორმით (კახა შაშიაშვილი და მალხაზ შაშიაშვილი [24])

თეორემა 6.2. *ნებისმიერი ორი $f(x)$ და $\varphi(x)$ სასრული ჩაზნექილი ფუნქციისთვის, რომლებიც განსაზღვრული არიან $[a, b]$ ინტერვალზე, სამართლიანია შემდეგი ენერგეტიკული შეფასება:*

$$\begin{aligned} & \int_a^b (x-a)^2(b-x)^2(f'(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \\ & \leq \frac{8}{9}\sqrt{3} \sup_{x \in (a,b)} |f(x) - \varphi(x)| \times \sup_{x \in (a,b)} |f(x) + \varphi(x)|(b-a)^3 \\ & \quad + \frac{4}{3} \left(\sup_{x \in (a,b)} |f(x) - \varphi(x)| \right)^2 (b-a)^3 \end{aligned} \quad (22)$$

(22) შეფასებას ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგნაირად: $f(x)$ -ის როლში ავიღოთ $\widehat{\varphi}_n(x)$, $\varphi(x)$ -ის როლში ავიღოთ თავდაპირველი $\varphi(x)$ ფუნქცია, a -ს როლში ავიღოთ $A-c$ და b -ს როლში $B+c$. მაშინ, 3.1 და 6.2 თეორემების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} & \int_{A-c}^{B+c} (x-(A-c))^2((B+c)-x)^2(\widehat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \\ & \leq \frac{8}{9}\sqrt{3} \sup_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \times \sup_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) + \varphi(x)|(B-A+2c)^3 \\ & \quad + \frac{4}{3} \left(\sup_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \right)^2 (B-A+2c)^3 \end{aligned} \quad (23)$$

ეს უტოლობა შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$\begin{aligned} & \int_{A-c}^{B+c} (x-(A-c))^2((B+c)-x)^2(\widehat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \\ & \leq \frac{8}{9}\sqrt{3} \max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \times \max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) + \varphi(x)|(B-A+2c)^3 \\ & \quad + \frac{4}{3} \left(\max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \right)^2 (B-A+2c)^3 \end{aligned}$$

შევაფასოთ ინტეგრალი

$$\begin{aligned} & \int_{A-c}^{B+c} (x - (A - c))^2 ((B + c) - x)^2 (\varphi'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \\ & \geq \int_A^B (x - (A - c))^2 ((B + c) - x)^2 (\varphi'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე

$$\int_A^B (x - (A - c))^2 ((B + c) - x)^2 (\varphi'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \geq c^4 \int_A^B (\varphi'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx$$

რადგან $(A - A - c)^2 (B + c - B)^2 = c^4$ ანუ

$$\begin{aligned} & c^4 \int_A^B (\varphi'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \\ & \leq \frac{8}{9} \sqrt{3} \max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \times \max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) + \varphi(x)| (B - A + 2c)^3 \\ & + \frac{4}{3} \left(\max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \right)^2 (B - A + 2c)^3 \end{aligned} \quad (24)$$

(19) და (20) ფორმულებიდან გამომდინარე (24) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} & c^4 \int_A^B (\varphi'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \\ & \leq \frac{8}{9} \sqrt{3} O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)}) \max_{x \in (A-c, B+c)} |\widehat{\varphi}_n(x) + \varphi(x)| (B - A + 2c)^3 \\ & + \frac{4}{3} (O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)}))^2 (B - A + 2c)^3 \xrightarrow[p]{} 0 \end{aligned}$$

როცა $n \rightarrow \infty$.

რადგან $O_p(\rho_n^{\beta/(2\beta+1)}) \xrightarrow[p]{} 0$, როცა $n \rightarrow \infty$.

დასკვნა

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ლოგარითმულად ჩაზნექილი ალბათური სიმკვრივის, მისი განაწილების ფუნქციისა და წარმოებულის არაპარამეტრული მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებები. ნაჩვენებია, რომ $\{f > 0\}$ სიმრავლის კომპაქტურ ქვესიმრავლეზე სუბრემუმის ნორმა $\hat{f}_n$ სიმკვრივის შეფასებასა და f უცნობ სიმკვრივეს შორის იკრებება 0-ისკენ $O_p((\log(n)/n)^\gamma)$ რიგით, სადაც $\gamma \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$ f -ის სიგლუვეზე დამოკიდებული. კერძოდ, ჩვენი შეფასება ადაპტირებულია f -ის უცნობ სიგლუვესთან. ასევე დასაბუთებულია, რომ მაქსიმალური დასაჯერობის არაპარამეტრული შეფასების $\hat{\varphi}_n(x)$ -ის მარცხენა წარმოებული $\hat{\varphi}'_n(x-)$ წარმოადგენს $\varphi'(x-)$ -ის ძალდებულ შეფასებას L_2 სივრცეში, ანუ $\int_A^B (\hat{\varphi}'_n(x-) - \varphi'(x-))^2 dx \xrightarrow[p]{} 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, სადაც $[A, B]$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ნებისმიერ კომპაქტურ ინტერვალს.

ლიტერატურა

- [1] Dragi Anevski. Estimating the derivative of a convex density. *Statistica Neerlandica*, 57:245-257, 02 2003.
- [2] Mark Bagnoli and Ted Bergstrom. *Log-concave probability and its applications*, volume 26, pages 217-241. 01 2006.
- [3] Fadoua Balabdaoui and Jon Wellner. Estimation of a k-monotone density: limit distribution theory and the spline connection. *The Annals of Statistics*, 35, 12 2007.
- [4] Fadoua Balabdaoui and Jon Wellner. Estimation of a k-monotone density: limit distribution theory and the spline connection. *The Annals of Statistics*, 35, 12 2007.
- [5] Richard Barlow and Frank Proschan. Statistical theory of reliability and life testing probability models to begin with. *Journal of the American Statistical Association*, 72:304, 01 1975.
- [6] George Chang and Guenther Walther. Clustering with mixtures of log-concave distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51:6242-6251, 08 2007.
- [7] Lutz Duembgen and Kaspar Rufibach. Maximum likelihood estimation of a log-concave density and its distribution function: Basic properties and uniform consistency. *Bernoulli*, 15, 10 2009.
- [8] A. Dumbgen, Husler and K. Rufibach. Active set and em algorithms for log-concave densities based on complete and censored data. 7, 02 2007.
- [9] P. Eggermont and V. LaRiccia. Maximum likelihood estimation of smooth monotone and unimodal densities. *Ann. Statist.*, 28, 05 2000.
- [10] James Gifford, I. Gijbels, Peter Hall, and L.-S. Huang. Nonparametric estimation of hazard rate under the constraint of monotonicity. *Catholique de Louvain - Institut de statistique, Papers*, 10, 01 1999.
- [11] Piet Groeneboom. Estimating a monotone density. *Proceedings of the Berkeley Conference in Honor of Jerzy Neyman and Jack Kiefer*, 2, 01 1985.
- [12] Piet Groeneboom. Brownian motion with a parabolic drift and airy functions. *Probability Theory and Related Fields*, 81:79-109, 02 1989.

- [13] Piet Groeneboom, G. Jongbloed, and Jon Wellner. Estimation of a convex function: Characterizations and asymptotic theory. *Annals of Statistics*, 29, 08 2001.
- [14] Peter Hall and Ingrid Keilegom. Testing for monotone increasing hazard rate. *Annals of Statistics*, 33, 08 2005.
- [15] Frank Hampel. Design, modelling, and analysis of some biological data sets. pages 93-128, 01 1987.
- [16] Marianne Jonker and Aad Vaart. A semi-parametric model for censored and passively registered data. *Bernoulli*, 7, 02 2001.
- [17] Joe Kiefer and J. Wolfowitz. Asymptotically minimax estimation of concave and convex distribution functions. *Probability Theory and Related Fields*, 34:73-85, 03 1976.
- [18] Vladimir Kulikov and Hendrik Lopuhaä. The behavior of the npml of a decreasing density near the boundaries of the support. *Ann. Statist.*, 34, 08 2006.
- [19] Mittal N., Ansari F., Gowda V. K., Brouzet Ch., Chen P., Larsson P., Roth S., Lundell F., Wågberg L., Kotov N., and Söderberg D. Multiscale control of nanocellulose assembly: Transferring remarkable nanoscale fibril mechanics to macroscale fibers. *ACS Nano*, 12, 05 2018.
- [20] Jayanta Pal, Michael Woodroffe, and Mary Meyer. Estimating a polya frequency function. 54:239-249, 01 2007.
- [21] T. Robertson, Farroll Wright, and Dykstra RL. Order restricted statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 06 1990.
- [22] Kaspar Rufibach. Computing maximum likelihood estimators of a log-concave density function. *Journal of Statistical Computation and Simulation - J STAT COMPUT SIM*, 77:561-574, 07 2007.
- [23] Debasis Sengupta. Some tests for log-concavity of life distributions. 05 2020.
- [24] Kakha Shashashvili and Malkhaz Shashashvili. Estimation of the derivative of the convex function by means of its uniform approximation. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 172:20-22, 01 2005.
- [25] Bernard Silverman. On the estimation of a probability density function by the maximum penalized likelihood method. *The Annals of Statistics*, 10, 09 1982.

- [26] Winfried Stute. The oscillation behavior of empirical processes. *The Annals of Probability*, 10, 02 1982.
- [27] Guenther Walther. Detecting the presence of mixing with multiscale maximum likelihood. *Journal of the American Statistical Association*, 97:508–513, 02 2002.
- [28] Edward Wegman. Maximum likelihood estimation of a unimodal density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41, 04 1970.
- [29] Michael Woodroffe and Jiayang Sun. A penalized maximum likelihood estimate of f ($0+$) when f is non-increasing. *Statistica Sinica*, 3, 01 1993.