



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისი სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

სალომე ჩაჩანიძე

დაგვიანების ფაქტორის შემცველი ერთი კლასის ორსაფეხურიანი
ოპტიმალური ამოცანის ამონახსნის არსებობის შესახებ

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე , ფიზიკა-მათემატიკურ
მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თ ბ ი ლ ი ს ი 2020

ს ა რ ჟ ე ვ ი

ანოტაცია (ქართულ ენაზე)	3
ანოტაცია (ინგლისურ ენაზე)	4
შესავალი	5
§ 1. ამოცანის დასმა. ძირითადი შედეგების ფორმულირება	
§ 2. დამხმარე დებულებები	
§ 3. თეორემა 1.1 დამტკიცება	
§ 4. თეორემა 1.2-1.4 დამტკიცება	
დასკვნა	
ლიტერატურა	

ანოტაცია

არაწრფივი ორსაფეხურიანი ოპტიმალური ამოცანისთვის ფაზურ კოორდინატებში მუდმივი დაგვიანების პარამეტრებით, წყვეტილი შუალედური პირობით და შეზღუდვებით ფაზურ კოორდინატებზე, ზოგადი სასაზღვრო პირობით და ფუნქციონალით დამტიკიცებულია ამონახსნის არსებობის თეორემა. ამონახსნის ქვეშ იგულისხმება დაგვიანების პარამეტრების, სისტემის საფეხურის ცვლილების მომენტის და მართვების ერთობლიობა. მიღებული შედეგი დაკონკრეტებულია კვაზიწრფივი და წრფივი ამოცანებისთვის, აგრეთვე ოპტიმალური ამოცანისთვის ინტეგრალური ფუნქციონალით.

Summary

The existence theorem is proved for the nonlinear two-stage optimal problem with the constant delay parameters in the phase coordinates, with the discontinuous intermediate condition and the phase restrictions, with the general boundary condition and functional. Under solution we imply the collection of delay parameters and moment of change stage of system and controls. The result obtained here is concretized for the quasi-linear and linear problems, for the optimal problem with the integral functional also.

შესავალი

ვთქვათ $t_0 < \theta_0 < \theta_1 < t_1$ მოცემული რიცხვებია და ვთქვათ $S(t), t \in [t_0, t_1]$, ახასიათებს სისტემის მდგომარეობას დროის $t \neq \theta$ მომენტში, სადაც $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ ფიქსირებული მომენტია. სისტემას ეწოდება ორსაფეხურიანი, თუ

$$S(t) = \begin{cases} S_1(t), & t \in [t_0, \theta), \\ S_2(t), & t \in (\theta, t_1] \end{cases}$$

და θ მომენტში არსებობს კავშირი სისტემის $S(\theta-) = S_1(\theta-)$ და $S(\theta+) = S_2(\theta+)$ მდგომარეობებს შორის. θ -ს ეწოდება სისტემის საფეხურის ცვლილების (გადართვის) მომენტი. მაგალითად, θ შეიძლება იყოს საფეხურის მოცილების შედეგად საფრენი აპარატის მასის ან ინვესტიციის მოცულობის ცვლილების მომენტი.

ნაშრომში, განხილულია ოპტიმალური ამოცანა ორსაფეხურიანი სამართი სისტემისთვის, რომლის საფეხურების მოძრაობის კანონი აღიწერება დაგვიანების ფაქტორის შემცველი ანუ დაგვიანებულ არგუმენტის დიფერენციალური განტოლებებით. აღნიშნული განტოლებებით, როგორც წესი, აღიწერება პროცესები რომელთა მდგომარეობა მოცემულ მომენტში დამოკიდებულია სისტემის ყოფაქცევაზე წარსულში. საფეხურიან ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევას ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების თვალსაზრისით მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა, მათ შორის [1-11]. სამაგისტრო ნაშრომში, ამონახსნის არსებობის თვალსაზრისით, განხილულია ოპტიმალური ამოცანა რომელიც შედგება შემდეგი კომპონენტებისგან:

1) ორსაფეხურიანი სამართი დაგვიანებულ არგუმენტის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), & t \in [t_0, \theta], & x(t) \in R_x^n, & (1) \\ \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-\sigma), u(t)), & t \in [\theta, t_1], & y(t) \in R_y^m, & (2) \end{cases}$$

სადაც $\tau \in [d_0, d_1]$, $d_1 > d_0 > 0$; $\sigma \in [h_0, h_1]$, $h_1 > h_0 > 0$; $u(\cdot) \in \Omega$, $v(\cdot) \in \Delta$;

2) უწყვეტი საწყისი პირობა (1) განტოლებისთვის

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - d_1, t_0];$$

3) წყვეტილი შუალედური პირობა ანუ წყვეტილი საწყისი პირობა (2) განტოლებისთვის

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in [\vartheta_0 - h_1, \theta), \quad y(\theta) = q(\theta, x(\theta)), \quad \text{სადაც } x(\theta) = x(\theta-);$$

4) შეზღუდვები ფაზურ კოორდინატებზე

$$\begin{cases} \rho(t, x(t)) \geq 0, \quad t \in [t_0, \theta], \\ \varsigma(t, y(t)) \geq 0, \quad t \in [\theta, t_1] \end{cases}$$

და პირობა ტრაექტორიების ბოლოებზე

$$\Phi(x(\theta), y(t_1)) = 0,$$

სადაც

$$\rho(t, x) = (\rho^1(t, x), \dots, \rho^{l_1}(t, x)), \quad \varsigma(t, y) = (\varsigma^1(t, y), \dots, \varsigma^{l_2}(t, y)), \quad \Phi(x, y) = (\Phi^1(x, y), \dots, \Phi^{l_3}(x, y))$$

$\rho \geq 0$ ვექტორული უტოლობის ქვეშ იგულისხმება, რომ $\rho^i \geq 0, i = \overline{1, l_1}$;

5) ფუნქციონალი

$$\zeta(w) = \zeta(\tau, \theta, \sigma, x(\theta), y(t_1)) \rightarrow \min,$$

რომლის მინიმიზაცია ხდება დასაშვებ $w = (\tau, \theta, \sigma, u(\cdot), v(\cdot))$ ელემენტების მიმართ

$$W = [d_1, d_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \times [h_1, h_2] \times \Omega \times \Delta$$

კლასიდან. w ელემენტს ეწოდება დასაშვები თუ შესრულებულია 2)-4) პირობა. 1)-ის (1) განტოლების ამონახსნი (პირველი საფეხურის ტრაექტორია) $x(t) = x(t; w)$, 2) უწყვეტი საწყისი პირობით, აღწერს სისტემის $S_1(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, მდგომარეობას-პირველ საფეხურს. 2) პირობას ეწოდება უწყვეტი, რადგანაც ყოველთვის $x(t_0) = \varphi(t_0)$. (2) განტოლების ამონახსნი (მეორე საფეხური ტრაექტორია) $y(t) = y(t; w)$, 3) წყვეტილი შუალედური პირობით, აღწერს

სისტემის $S_2(t)$, $t \in [\theta, t_1]$, მდგომარეობას-მეორე საფეხურს. 3) პირობას ეწოდება წყვეტილი შუალედური პირობა, რადგანაც საზოგადოდ $y(\theta) \neq q(\theta, x(\theta))$. 4) არის შეზღუდვები პირველ და მეორე საფეხურის ტრაექტორიებზე.

ოპტიმალური ამოცანა: W კლასში ვიპოვოთ ისეთი $w_0 \in W$ ელემენტი, რომლის შესაბამისი ტრაექტორიები აკმაყოფილებენ 1)-4) შეზღუდვებს და 5) ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $w_0 \in W$ ეწოდება ამოცანის ამონახსნი (ოპტიმალური ელემენტი). ამრიგად, ამოცანის ამონახსნის მოძებნა გულისხმობს τ და σ დაგვიანების პარამეტრების, გადართვის θ მომენტის, $u(t)$ და $v(t)$ მართვების ოპტიმალურად არჩევა. 1)- 5) ამოცანას ეწოდება დაგვიანების ფაქტორის შემცველი ორსაფეხურიანი ოპტიმალური ამოცანა. ნაშრომში, [12]-ში გადმოცემული მეთოდით, დამტკიცებულია 1)-5) ამოცანის ამონახსნის არსებობა ელემენტთა W კლასში (თეორმა 1.1-ძირითადი შედეგი), სადაც Ω და Δ არის, შესაბამისად, ზომადი $u(t)$ და $v(t)$ ფუნქციების სიმრავლე მნიშვნელობებით $U \subset R_\mu^r$ და $V \subset R_\nu^k$ კომპაქტური სიმრავლეებიდან. გარდა ამისა, ძირითადი შედეგი დაკონკრეტებულია კვაზიწრფივი და წრფივი ოპტიმალური ამოცანებისთვის (თეორემა 1.2 და 1.3), აგრეთვე ამოცანისთვის ინტეგრალური ფუნქციონალით (თეორემა 1.4). [13, 14]-ში და [12]-ში ამონახსნების არსებობის საკითხი გამოკვლეულია საფეხურებიანი ოპტიმალური ამოცანებისთვის ფიქსირებული და არაფიქსირებული დაგვიანების პარამეტრების შემთხვევაში. [12]-გან განსხვავებით, ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ აქ შუალედური პირობა წყვეტილია და ტრაექტორიები აკმაყოფილებენ ფუნქციონალურ შეზღუდვებს. ნაშრომის პირველ პარაგრაფში დასმულია ოპტიმალური ამოცანა და მოყვანილია ძირითადი შედეგები ოთხი თეორემის სახით. მე-2 პარაგრაფი ეხება დამხმარე დებულებებს, რომლებიც არსებითად გამოიყენება თეორემების დასამტკიცებლად. სახელდობრ, აქ დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის გაგრძელებადობის შესახებ. მე-3 პარაგრაფში, დამტკიცებულია თეორემა 1.1. მე-4 პარაგრაფში, ამონახსნის არსებობის თეორემები დამტკიცებულია კვაზიწრფივი და წრფივი ამოცანებისთვის და ამოცანისთვის ინტეგრალური ფუნქციონალით. ნაშრომის ბოლოში მოცემულია დასკვნა და ლიტერატურის ნუსხა. ნაშრომში მიღებული შედეგები, თეზისის სახით გამოქვეყნებულია ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXIV საერთაშორისო გაფართოებული სხდომების თეზისების ელექტრონულად გამოცემულ კრებულში [14] (<http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2020/>).

§ 1. ამოცანის დასმა. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ $a < t_0 < \vartheta_0 < \vartheta_1 < t_1 < b$, $0 < d_0 < d_1$ და $0 < h_0 < h_1$ მოცემული რიცხვებია, ისეთი რომ შესრულებულია პირობები

$$\vartheta_0 - d_1 > t_0, \vartheta_0 - h_1 > t_0, t_1 - h_1 > \vartheta_1.$$

R_x^n -ით აღვნიშნოთ $x = (x^1, \dots, x^n)^T$ ვექტორთა (წერტილთა) n -განზომილებიანი სივრცე ნორმით

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2,$$

სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას. ვიგულისხმობთ, რომ $O \subset R_x^n$ და $Y \subset R_y^m$ სიმრავლეები არის ღია, ხოლო $U \subset R_u^r$ და $V \subset R_v^k$ - კომპაქტური. განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(t, x_1, x_2, u) = (f^1(t, x_1, x_2, u), \dots, f^n(t, x_1, x_2, u))^T,$$

და

$$g(t, y_1, y_2, v) = (g^1(t, y_1, y_2, v), \dots, g^m(t, y_1, y_2, v))^T,$$

რომლებიც უწყვეტია $[a, \vartheta_1] \times O^2 \times U$ და $[\vartheta_0, b] \times Y^2 \times V$ სიმრავლეებზე, შესაბამისად, და უწყვეტად წარმოებადია $x_1, x_2 \in O$ და $y_1, y_2 \in Y$ ცვლადების მიმართ. Ω -თი აღვნიშნოთ ზომად $u(t) \in U$, $t \in [t_0, \vartheta_1]$ ფუნქციების სიმრავლე, ხოლო Δ -თი -ზომად $v(t) \in V$, $t \in [\vartheta_0, t_1]$ ფუნქციების სიმრავლე.

ყოველ $w = (\tau, \theta, \sigma, u(\cdot), v(\cdot)) \in W = [d_0, d_1] \times [\vartheta_0, \vartheta_1] \times [h_0, h_1] \times \Omega \times \Delta$ ელემენტს შევუსაბამოთ τ და σ დაგვიანების შემცველი ორსაფეხრიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), t \in [t_0, \theta], \\ \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-\sigma), v(t)), t \in [\theta, t_1] \end{cases} \quad (1.1)$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0] \quad (1.2)$$

და წყვეტილი შუალედური პირობით

$$y(t) = \psi(t), t \in [\hat{\sigma}, \theta], y(\theta) = g(\theta, x(\theta)), x(\theta) = x(\theta-) , \quad (1.3)$$

სადაც $\varphi: [\hat{\tau}, \theta_0] \rightarrow O$, $\psi: [\hat{\sigma}, \theta_1] \rightarrow Y$ და $q: [\theta_0, \theta_1] \times O \rightarrow Y$ უწყვეტი მოცემული ფუნქციებია, $\hat{\tau} = t_0 - d_1$, ხოლო $\hat{\sigma} = \theta_0 - h_1$. (1.1) სისტემაში პირველი განტოლება აღწერს ობიექტის პირველ საფეხურს, ხოლო მე-2 განტოლება- მე-2 საფეხურს, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ ეწოდება საფეხურის ცვლილების მომენტი. $y(\theta) = q(\theta, x(\theta))$ პირობა ერთმანეთთან აკავშირებს საფეხურებს.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $w = (\tau, \theta, \sigma, u(\cdot), v(\cdot)) \in W$ ფიქსირებული ელემენტია. ფუნქციათა წყვილს

$$S(w) = \{ x(t) = x(t; w), t \in [\hat{\tau}, \theta]; y(t) = y(t; w), t \in [\hat{\sigma}, t_1] \}$$

ეწოდება (1.1) ორსაფეხურიანი სისტემის ამონახსნი ან w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ ფუნქცია $x(t) \in O$, $t \in [\hat{\tau}, \theta]$, ხოლო $[\hat{\tau}, t_0]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (1.2) საწყის პირობას, $[t_0, \theta]$ მონაკვეთზე იგი აბსოლუტურად უწყვეტია და თითქმის ყველგან (თ. ყ.) ამავე მონაკვეთზე აკმაყოფილებს (1.1) სისტემის პირველ განტოლებას. ფუნქცია $y(t) \in Y$, $t \in [\hat{\sigma}, t_1]$, ხოლო $[\hat{\sigma}, \theta]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (1.3) შუალედურ პირობას, $[\theta, t_1]$ მონაკვეთზე იგი აბსოლუტურად უწყვეტია და თ. ყ. ამავე მონაკვეთზე აკმაყოფილებს (1.1) სისტემის მეორე განტოლებას.

განსაზღვრება 1.2. $w \in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ არსებობს შესაბამისი ამონახსნი $S(w)$, რომლიც აკმაყოფილებს ფაზურ შეზღუდვებს

$$\begin{cases} \rho(t, x(t)) \geq 0, t \in [t_0, \theta], \\ \zeta(t, y(t)) \geq 0, t \in [\theta, t_1], \end{cases} \quad (1.4)$$

და პირობას ტრაექტორიის ბოლოებზე

$$\Phi(x(\theta), y(t_1)) = 0,$$

სადაც $\rho(t, x) = (\rho^1(t, x), \dots, \rho^{l_1}(t, x))$, $\varsigma(t, y) = (\varsigma^1(t, y), \dots, \varsigma^{l_2}(t, y))$ ვექტორ ფუნქციები, შესაბამისად, უწყვეტია $[t_0, t_1] \times O$ და $[t_0, t_1] \times Y$ სიმრავლეებზე; $\Phi(x, y) = (\Phi^1(x, y), \dots, \Phi^{l_3}(x, y))$ უწყვეტია Y -ზე; $\rho \geq 0$ და $\varsigma \geq 0$ ვექტორული უტოლობების ქვეშ იგულისხმება, რომ $\rho^i \geq 0, i = \overline{1, l_1}$ და $\varsigma^j \geq 0, j = \overline{1, l_2}$. დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0 . ვთქვათ $\zeta(\tau, \theta, \sigma, x, y)$ არის $[d_0, d_1] \times [h_0, h_1] \times O \times Y$ სიმრავლეზე უწყვეტი სკალარული ფუნქცია. განვიხილოთ ფუნქციონალი $\zeta(w) = \zeta(\tau, \theta, \sigma, x(\theta), y(t_1))$.

განსაზღვრება 1.3. $w_0 = (\tau_0, \theta_0, \sigma_0, u_0(\cdot), v_0(\cdot)) \in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური თუ ნებისმიერი $w \in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\zeta(w_0) = \zeta(\tau_0, \theta_0, \sigma_0, x_0(\theta_0), y_0(t_1)) \leq \zeta(w) = \zeta(\tau, \theta, \sigma, x(\theta), y(t_1)), \quad (1.5)$$

სადაც $x_0(t) = x(t; w_0)$, $y_0(t) = y(t; w_0)$.

(1.1)-(1.5) ამოცანას ეწოდება დაგვიანების ფაქტორის შემცველი ორსაფეხურიანი ოპტიმალური ამოცანა, ხოლო w_0 ეწოდება მისი ამონახსნი. ნაშრომის მიზანია ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხის გამოკვლევა. ქვემოთ მოყვანილ თეორემებში დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ამონახსნის არსებობას.

თეორემა 1.1. *ორსაფეხურიანი ოპტიმალური ამოცანის ამონახსნი w_0 არსებობს, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1.1. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.2. *არსებობს კომპაქტური სიმრავლეები $K_1 \subset O$ და $M_1 \subset Y$ ისეთი რომ ნებისმიერი $w \in W_0$ შესაბამისი $S(w) = \{x(t) \mid t \in [\hat{\tau}, \theta]; y(t), t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}$ ამონახსნისთვის შესრულებულია პირობები:*

$$x(t) \in K_1, t \in [\hat{\tau}, \theta], y(t) \in M_1, t \in [\hat{\sigma}, t_1];$$

1.3. ყოველი ფიქსირებული $(t, x_1, x_2) \in [t_0, t_1] \times O^2$ და $(t, y_1, y_2) \in [t_0, t_1] \times Y^2$ წერტილები-სთვის, შესაბამისად, სიმრავლეები

$$P_1(t, x_1, x_2) = \{f(t, x_1, x_2, u) : u \in U\} \text{ და } P_2(t, y_1, y_2) = \{g(t, y_1, y_2, v) : v \in V\}$$

ამოზნეილია.

თეორემა 1.1, [12]-ში მოყვანილი მეთოდით, დამტკიცებულია მე-3 პარაგრაფში. ქვემოთ მოყვანილი თეორემები არის თეორემა 1.1-ის შედეგი და ისინი დამტკიცებულია მე-4 პარაგრაფში.

თეორემა 1.2. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.4. W_0 სიმრავლე არცარიელია;

1.5. $f(t, x_1, x_2, u)$ და $g(t, y_1, y_2, v)$ ფუნქციებს აქვთ სახე

$$f(t, x_1, x_2, u) = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u, \quad g(t, y_1, y_2, v) = C(t, y_1, y_2) + D(t, y_1, y_2)v,$$

სადაც A და C შესაბამისი განზომილების ვექტორ-ფუნქციებია, ხოლო B და D შესაბამისი განზომილების მატრიც-ფუნქციები;

1.6. არსებობს კომპაქტური სიმრავლეები $K_1 \subset O$ და $M_1 \subset Y$ ისეთი რომ ნებისმიერი $w \in W_0$ შესაბამისი $S(w) = \{x(t) \mid t \in [\hat{t}, \theta]; y(t), t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}$ ამონახსნისთვის შესრულებულია პირობები:

$$x(t) \in K_1, t \in [\hat{t}, \theta], y(t) \in M_1, t \in [\hat{\sigma}, t_1];$$

1.7. სიმრავლეები U და V ამოზნეილია.

მაშინ კვაზიამოზნეილ ოპტიმალურ ამოცანას აქვს ამონახსნი.

თეორემა 1.3. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.8. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.9. $f(t, x_1, x_2, u)$ და $g(t, y_1, y_2, v)$ ფუნქციებს აქვთ სახე

$$f(t, x_1, x_2, u) = A_1(t)x_1 + B_1(t)x_2 + C_1(t)u, \quad g(t, y_1, y_2, v) = A_2(t)y_1 + B_2(t)y_2 + C_2(t)v;$$

1.10. სიმრავლეები U და V ამოზნეკილია.

მაშინ წრფივ ოპტიმალურ ამოცანას აქვს ამონახსნი.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა, სადაც $\zeta(w)$ შეცვლილია ინტეგრალური ფუნქციონალით

$$\int_{t_0}^{\theta} f^0(t, x(t), x(t-\tau), u(t))dt + \int_{\theta}^{t_1} g^0(t, y(t), y(t-\sigma), v(t))dt,$$

სადაც $f^0: [t_0, t_1] \times O^2 \rightarrow R$, $g^0: [t_0, t_1] \times Y^2 \rightarrow R$ უწყვეტი ფუნქციებია. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $F = (f^0, f)^T$, $G = (g^0, g)^T$.

თეორემა 1.4. ორსაფეხურიანი ოპტიმალური ამოცანისთვის, ინტეგრალური ფუნქციონალით, არსებობს ამონახსნი w_0 თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.11. W_0 სიმრავლე არაცარიელია;

1.12. არსებობს კომპაქტური სიმრავლეები $K_1 \subset O$ და $M_1 \subset Y$ ისეთი რომ ნებისმიერი $w \in W_0$ შესაბამისი $S(w) = \{x(t) \mid t \in [\hat{\tau}, \theta]; y(t), t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}$ ამონახსნისთვის შესრულებულია პირობები:

$$x(t) \in K_1, t \in [\hat{\tau}, \theta], y(t) \in M_1, t \in [\hat{\sigma}, t_1];$$

1.13. ყოველი ფიქსირებული $(t, x_1, x_2) \in [t_0, t_1] \times O^2$ და $(t, y_1, y_2) \in [t_0, t_1] \times Y^2$ წერტილებით, შესაბამისად, სიმრავლეები

$$\{ F(t, x_1, x_2, u) : u \in U \} \text{ და } \{ G(t, y_1, y_2, v) : v \in V \}$$

ამოზნეცილია

§ 2. დამხმარე დებულებები

ვთქვათ $A(t), B(t), t \in [t_0, \theta_1]$, უწყვეტი მატრიც-ფუნქციებია განზომილებით $n \times n$, ხოლო $f(t)$ - ზომადი შემოსაზღვრული n განზომილებიანი სვეტ-ვექტორ-ფუნქცია, $x_0 \in R_x^n$ მოცემული ვერტილია. ყოველი $\tau \in [d_0, d_1]$ დაგვიანების პარამეტრისთვის კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + f(t) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0], x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t; \tau), t \in [\hat{\tau}, \theta_1]$.

თეორემა 2.1. ყოველი $\tau \in [d_0, d_1]$ (2.1) ამოცანის ამონახსნი $[t_0, \theta_1]$ მონაკვეთზე წარმოიდგინება ფორმულით

$$x(t; \tau) = Y(t_0; t, \tau)x_0 + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau)B(s + \tau)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau)f(s)ds, \text{ (კოშის ფორმულა)}$$

სადაც $Y(s; t, \tau)$ არის მატრიც-ფუნქცია განზომილებით $n \times n$, იგი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial}{\partial s} Y(s; t, \tau) = -Y(s; t, \tau)A(s) - Y(s + \tau; t, \tau)B(s + \tau), s \in [t_0, t] \quad (2.2)$$

და პირობას

$$Y(s; t, \tau) = \begin{cases} E, s = t, \\ \Theta, s > t, \end{cases} \quad (2.3)$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო Θ ნულოვანი მატრიცა.

დამტკიცება. ვთქვათ $t \in (t_0, \theta_1]$ და $s \in [t_0, t]$. განტოლების

$$\dot{x}(s) = A(s)x(s) + B(s)x(t - \tau) + f(s), s \in [t_0, t]$$

ორივე მხარე გავამრავლოთ (2.3) თვისების მქონე $Y(s; t, \tau)$ მატრიცზე, რომელიც აკმა-
ყოფილებს (2.2) განტოლებას, და ვაინტეგრირებთ მიღებული ტოლობა მონაკვეთზე $[t_0, t]$,
მივიღებთ

$$\int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) \dot{x}(s) ds = \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) [A(s)x(s) + B(s)x(s - \tau) + f(s)] ds. \quad (2.4)$$

ფუნქცია $Y(s; t, \tau)$ აბსოლუტურად უწყვეტია s -ის მიმართ, ამიტომ ნაწილობითი ინტე-
გრების ძალით და (2.3) პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) \dot{x}(s) ds = x(t) - Y(t_0; t, \tau)x_0 - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} Y(s; t, \tau) x(s) ds. \quad (2.5)$$

ცვლადთა გარდაქმნით და (2.3) პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) B(s) x(s - \tau) ds &= \int_{t_0 - \tau}^{t - \tau} Y(s + \tau; t, \tau) B(s + \tau) x(s) ds \\ &= \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau) B(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) B(s + \tau) x(s) ds. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.4)-დან (2.5)-(2.6) ფორმულების გათვალისწინებით და გარკვეული წევრების დაჯგუფების
შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} x(t) &= Y(t_0; t, \tau)x_0 + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s + \tau; t, \tau) B(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) f(s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial}{\partial s} Y(s; t, \tau) + Y(s; t, \tau) A(s) + Y(s + \tau; t, \tau) B(s + \tau) \right] x(s) ds. \end{aligned}$$

აქედან მიიღება კოშის ფორმულა (იხ. (2.2)).

თეორემა 2.2 ([15], გვ. 32). $Y(s; t, \tau)$ მატრიც-ფუნქცია უწყვეტია სიმრავლეზე

$$\Pi = \{(s, t, \tau) : s \in [t_0, t], t \in [t_0, \theta], \tau \in [d_0, d_1]\}.$$

ყოველ $w = (\tau, \theta, \sigma, u(\cdot), v(\cdot)) \in W$ ელემენტს შევუსაბამოთ ორსაფეხურიანი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = f(t, \alpha(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha)(t - \tau), u(t)), t \in [t_0, \theta], \\ \dot{\beta}(t) = g(t, \beta(t), h_2(\theta, \psi, \beta)(t - \sigma), v(t)), t \in [\theta, t_1] \end{cases} \quad (2.7)$$

საწყისი პირობით

$$\alpha(t_0) = \varphi(t_0) \quad (2.8)$$

და შუალედური პირობით

$$\beta(\theta) = q(\theta, \alpha(\theta)), \quad (2.9)$$

სადაც ოპერატორები $h_1(t_0, \varphi, \alpha)(t)$ და $h_2(t_0, \psi, \beta)(t)$ განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$h_1(t_0, \varphi, \alpha)(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0], \\ \alpha(t), t \in [t_0, \theta], \end{cases} \quad (2.10)$$

$$h_2(t_0, \psi, \beta)(t) = \begin{cases} \psi(t), t \in [\hat{\sigma}, \theta], \\ \beta(t), t \in [\theta, t_1]. \end{cases} \quad (2.11)$$

განსაზღვრება 2.1. ვთქვათ $w = (\tau, \theta, \sigma, u(\cdot), v(\cdot)) \in W$ ფიქსირებული ელემენტია. ფუნქციათა წყვილს $S_1(w) = \{\alpha(t) = \alpha(t; w), t \in [t_0, \theta]; \beta(t) = \beta(t; w), t \in [\theta, t_1]\}$ ეწოდება (2.7) განტოლების ამონახსნი ან w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ $\alpha(t) \in O$, $t \in [t_0, \theta]$, აკმაყოფილებს (2.8) საწყის პირობას, აბსოლუტურად უწყვეტია და თ. ყ. აკმაყოფილებს (2.7) სისტემის პირველ განტოლებას. $\beta(t) \in Y$, $t \in [\theta, t_1]$, აკმაყოფილებს (2.9) შუალედურ პირობას, აბსოლუტურად უწყვეტია და თ. ყ. აკმაყოფილებს (2.7) სისტემის მეორე განტოლებას.

განსაზღვრება 2.2. ამონახსნს $S_2(w) = \{\alpha_1(t), t \in [t_0 - \delta, \hat{\theta} + \delta]; \beta_1(t), t \in [\hat{\theta} - \delta, t_1 + \delta]\}$, სადაც $\delta > 0, t_0 - \delta > a, \hat{\theta} + \delta < t_1, \hat{\theta} - \delta > t_0, t_1 + \delta < b$ ეწოდება $S_1(w)$ ამონახსნის გაგრძელება, თუ $\alpha_1(t), [t_0 - \delta, \hat{\theta} + \delta]$ -ზე არის $\alpha(t), t \in [t_0, \theta]$, ამონახსნის გაგრძელება, ხოლო $\beta_1(t), [\hat{\theta} - \delta, t_1 + \delta]$ -ზე არის $\beta(t), t \in [\theta, t_1]$, ამონახსნის გაგრძელება.

ვთქვათ $K_i \subset K, M_i \subset Y, i = 2, 3$ კომპაქტური სიმრავლეები: K_3 შეიცავს K_2 სიმრავლის რაიმე მიდამოს, ხოლო M_3 შეიცავს M_2 სიმრავლის რაიმე მიდამოს.

თეორემა 2.3. ვთქვათ $S_1(w_i) = \{\alpha_i(t) \in K_2, t \in [t_0, \theta_i]; \beta_i(t) \in M_2, t \in [\theta_i, t_1]\}$ არის $w_i = (\tau_i, \theta_i, \sigma_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \in W, i = 1, 2, \dots$, ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \theta_0. \quad (2.12)$$

მაშინ საკმარისად დიდი $i_0 \geq 1$ არსებობს $S_1(w_i)$ ამონახსნის გაგრძელება ე. ი. არსებობს $w_i, i \geq i_0$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი

$$S_2(w_i) = \{\alpha_{i1}(t) \in K_3, t \in [t_0 - \delta, \theta_0 + \delta]; \beta_{i1}(t) \in M_3, t \in [\theta_0 - \delta, t_1 + \delta]\},$$

სადაც $\delta > 0$ არ არის დამოკიდებული i -ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ K_2 სიმრავლის ჩაკეტილი ε -მიდამო

$$K_2(\varepsilon) = \{x \in O : \exists \hat{x} \in K_2, |x - \hat{x}| \leq \varepsilon\}$$

შედის $\text{int } K_3$. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $Q \subset R_x^n \times R_x^n$ და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $\chi : R_x^n \times R_x^n$ ისეთი რომ

$$K_2(\varepsilon) \times [K_0 \cup K_2(\varepsilon)] \subset Q \subset K_3 \times [K_0 \cup K_3], \text{ სადაც } K_0 = \varphi([\hat{t}, \theta_1])$$

და

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in Q, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin K_3 \times [K_0 \cup K_3]. \end{cases}$$

ყოველი $i = 1, 2, \dots$ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{\alpha}(t) = \Psi(t, \alpha(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha)(t - \tau_i), u_i(t)),$$

სადაც $\Psi(t, x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) f(t, x_1, x_2, u)$,

საწყისი პირობით (2.8) აქვს ამონახსნი $\alpha_{i1}(t)$, რომელიც განმარტებულია $[a, t_1]$ -ზე და

აკმაყოფილებს პირობას $\alpha_{i1}(t) \in K_3, t \in [a, t_1]$ ([15]-ში იხ. თეორემა 1.3.1-ის დამტკიცება).

რადგანაც

$$(\alpha_i(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha_i)(t - \tau_i)) \in K_2 \times [K_0 \cup K_2] \subset Q, t \in [t_0, \theta_i]$$

ამიტომ

$$\chi(\alpha_i(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha_i)(t - \tau_i)) = 1, t \in [t_0, \theta_i]$$

ე. ი.

$$\Psi(t, \alpha_i(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha_i)(t - \tau_i), u_i(t)) = f(t, \alpha_i(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha_i)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0, \theta_i].$$

ერთადერთობის გამო

$$\alpha_{i1}(t) = \alpha_i(t), t \in [t_0, \theta_i].$$

არსებობს $\delta_0 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $i = 1, 2, \dots$ სამართლიანია

$[t_0 - \delta_0, \theta_i + \delta_0] \subset [a, t_1]$ და ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\alpha_{i1}(t) - \alpha_{i1}(t_0)| \leq \int_t^{t_0} |\Psi(s, \alpha_{i1}(s), h_1(t_0, \varphi, \alpha_{i1})(s - \tau_i), u_i(s))| ds \leq \varepsilon, t \in [t_0 - \delta_0, t_0].$$

$$|\alpha_{i1}(t) - \alpha_{i1}(\theta_i)| \leq \int_{\theta_i}^t |\Psi(s, \alpha_{i1}(s), h_1(t_0, \varphi, \alpha_{i1})(s - \tau_i), u_i(s))| ds \leq \varepsilon, t \in [\theta_i, \theta_i + \delta_0].$$

ამ უტოლობიდან და $\alpha_{i1}(\theta_i), \alpha_{i1}(t_0) \in K_2$ პირობის გათვალისწინებით დავასკვნით რომ

$$(\alpha_{ii}(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha_{i1})(t - \tau_i)) \in K_2(\varepsilon) \times [K_0 \cup K_2(\varepsilon)] \subset Q, t \in [t_0 - \delta_0, \theta_i + \delta_0].$$

ე.ო.

$$\chi(\alpha_{i1}(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha_{i1})(t - \tau_i)) = 1, t \in [t_0 - \delta_0, \theta_i + \delta_0]$$

ამრიგად, $\alpha_{i1}(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\alpha}(t) = f(t, \alpha(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0 - \delta, \theta_i + \delta_0]$$

და პირობებს

$$\alpha_{i1}(t_0) = \varphi(t_0), \alpha_{i1}(t) \in K_3, t \in [t_0 - \delta_0, \theta_i + \delta_0].$$

ვთქვათ $\delta \in (0, \delta_0)$, (2.12) ძალით საკმარისად დიდი $i_0 \geq 1$ გვექნება

$$[t_0 - \delta_0, \theta_i + \delta_0] \supset [t_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \supset [t_0, \theta_i], i \geq i_0.$$

მაშასადამე, $\alpha_{i1}(t), i \geq i_0$, ამონახსნი განმარტებულია $[t_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\alpha_{i1}(t) \in K_3, t \in [t_0 - \delta, \theta_0 + \delta]; \alpha_{i1}(t) = \alpha_i(t), t \in [t_0, \theta_i].$$

გაგრძელება. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ M_2 სიმრავლის ჩაკეტილი ε -მიდამო

$$M_2(\varepsilon) = \{y \in Y : \exists \hat{y} \in M_2, |y - \hat{y}| \leq \varepsilon\}$$

შედის $\text{int } M_3$. არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $\hat{Q} \subset R_y^m \times R_y^m$ და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $\hat{\chi} : R_y^m \times R_y^m$ ისეთი რომ

$$M_2(\varepsilon) \times [M_0 \cup M_2(\varepsilon)] \subset \hat{Q} \subset M_3 \times [M_0 \cup M_3], \text{ სადაც } M_0 = \{q(t, x) : t \in [\hat{\sigma}, \mathfrak{g}_1], x \in K_3\}$$

და

$$\hat{\chi}(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & (y_1, y_2) \in \hat{Q}, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin M_3 \times [M_0 \cup M_3]. \end{cases}$$

ყოველი $i = 1, 2, \dots$ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{\beta}(t) = \hat{\Psi}(t, \beta(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta)(t - \sigma_i), v_i(t)), \quad t \in [\theta_i, t_1],$$

სადაც

$$\hat{\Psi}(t, y_1, y_2) = \hat{\chi}(y_1, y_2)g(t, y_1, y_2, v),$$

საწყისი პირობით (2.9) აქვს ამონახსნი $\beta_{i1}(t)$, რომელიც განმარტებულია $[t_0, b]$ -ზე და აკმაყოფილებს პირობას

$$\beta_{i1}(t) \in M_3, \quad t \in [t_0, b].$$

რადგანაც

$$(\beta_i(t), h_2(\theta_i, q, \beta_i)(t - \sigma_i)) \in M_2 \times [M_0 \cup M_2] \subset \hat{Q}, \quad t \in [\theta_i, t_1],$$

ამიტომ

$$\hat{\chi}(\beta_i(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta_i)(t - \sigma_i)) = 1, \quad t \in [\theta_i, t_1]$$

ე.ი.

$$\hat{\Psi}(t, \beta_i(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta_i)(t - \sigma_i), v_i(t)) = g(t, \beta_i(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta_i)(t - \sigma_i), v_i(t)), \quad t \in [\theta_i, t_1].$$

ერთადერთობის გამო

$$\beta_{i1}(t) = \beta_i(t), \quad t \in [\theta_i, t_1].$$

არსებობს $\delta_1 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $i = 1, 2, \dots$ სამართლიანია

$[\theta_i - \delta_1, t_1 + \delta_1] \subset [t_0, b]$ და ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\beta_{i1}(t) - \beta_{i1}(t_1)| \leq \int_{t_1}^t |\hat{\Psi}(s, \beta_{i1}(s), h_2(\theta_i, \psi, \beta_{i1})(s - \sigma_i), v_i(s))| ds \leq \varepsilon, \quad t \in [t_1, t_1 + \delta_1],$$

$$|\beta_{i1}(t) - \beta_{i1}(\theta_i)| \leq \int_t^{\theta_i} |\dot{\Psi}(s, \beta_{i1}(s), h_2(\theta_i, \psi, \beta_{i1})(s - \sigma_i), v_i(s))| ds \leq \varepsilon, t \in [\theta_i - \delta_1, \theta_i].$$

ამ უტოლობიდან და $\beta_{i1}(\theta_i), \beta_{i1}(t_1) \in M_2$ პირობის გათვალისწინებით დავასკვნით რომ

$$(\beta_{ii}(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta_{ii})(t - \sigma_i)) \in M_2(\varepsilon) \times [M_0 \cup M_2(\varepsilon)] \subset \hat{Q}, t \in [\theta_i - \delta_1, t_1 + \delta_1].$$

$$\text{ე.ი. } \hat{\chi}(\beta_{ii}(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta_{ii})(t - \sigma_i)) = 1, t \in [\theta_i - \delta_1, t_1 + \delta_1].$$

ამრიგად, $\beta_{i1}(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\beta}(t) = g(t, \beta(t), h_2(\theta_i, \psi, \beta)(t - \sigma_i), v_i(t)), t \in [\theta_i - \delta_1, t_1 + \delta_1]$$

და პირობებს

$$\beta_{i1}(\theta_i) = q(\theta_i, x_i(\theta_i)), \beta_{i1}(t) \in M_3, t \in [\theta_i - \delta_1, t_1 + \delta_1].$$

ვთქვათ $\delta \in (0, \delta_1)$, საკმარისად დიდი $i_0 \geq 1$ გვექნება

$$[\theta_i - \delta_1, t_1 + \delta_1] \supset [\theta_0 - \delta, t_1 + \delta] \supset [\theta_i, t_1], i \geq i_0.$$

მაშასადამე, $\beta_{i1}(t), i \geq i_0$, ამონახსნი განმარტებულია $[\theta_0 - \delta, t_1 + \delta]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\beta_{i1}(t) \in M_3, t \in [\theta_0 - \delta, t_1 + \delta]; \beta_{i1}(t) = \beta_i(t), t \in [\theta_i, t_1].$$

$C = C(I, R_z^m)$ აღნიშნავს უწყვეტ $z(t) \in R_z^m, t \in I = [a, b]$ ფუნქციათა სივრცეს ნორმით

$$\|z\| = \max_{t \in I} |z(t)|.$$

განსაზღვრება 2.3. $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება თანაბარ-შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $N > 0$ რომ $|z_i(t)| < N, \forall t \in I, i = 1, 2, \dots$

განსაზღვრება 2.4. $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, რომ $\forall t', t'' \in I: |t' - t''| < \delta$ ადგილი აქვს უტოლობას $|z_i(t') - z_i(t'')| < \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots$

ლემა 2.1 (არცელა-ასკოლი). თუ $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბარ-შემოსაზღვრულია და თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტი, მაშინ მისგან შეიძლება გამოიყოს ქვემიმდევრობა, რომელიც ნორმით კრებადია უწყვეტი $z_0(t)$ ფუნქციისკენ ე.ი. არსებობს ისეთი ქვემიმდევრობა $z_{i_k}(\cdot) \in C, k = 1, 2, \dots$ რომ $\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_{i_k} - z_0\| = 0$.

განსაზღვრება 2.5. $z_i(\cdot), i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება თანაბარ-ლიფშიცური, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $H > 0$ რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|z_i(t') - z_i(t'')| < H|t' - t''|, \forall t', t'' \in I; \forall i = 1, 2, \dots$$

ლემა 2.2. თუ $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა არის თანაბარ-ლიფშიცური, მაშინ იგი თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტია.

განსაზღვრება 2.6. $z(t), t \in I$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ რომ I სეგმენტის ნებისმიერი არაგადამფარავი სეგმენტია $[a_k, b_k], k = 1, 2, \dots, m$ სასრული სისტემისთვის, რომლისთვისაც

$$\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^m |z(b_i) - z(a_i)| < \varepsilon.$$

$L_1 = L_1(I, R_z^m)$ აღნიშნავს ზომად $z(t) \in R_z^m, t \in I$ და ლებეგის აზრით ინტეგრებად (ჯამებად) ფუნქციათა სივრცეს. ტოლობა სამართლიანია თ. ყ.-გან ნიშნავს, რომ მას ადგილი არა აქვს ნულზომის სიმრავლეზე.

ლემა 2.3 (ლეზეგი). აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია $z(\cdot) \in C$ თითქმის ყველგან წარმოებადია, მისი წარმოებული $\dot{z}(t)$ (წარმოებული არსებობს თ. ყ.) ზომადაა და ეკუთვნის L_1 სივრცეს. გარდა ამისა,

$$z(t) = z(a) + \int_a^t \dot{z}(s) ds, \quad t \in I.$$

ლემა 2.4. ვთქვათ $z_i(\cdot) \in C, i = 1, 2, \dots$ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობაა და მიმდევრობა $\dot{z}_i(t), i = 1, 2, \dots$ თანაბარ-შემოსაზღვრულია, ე.ი. არსებობს ისეთი მუდმივი $H > 0$ რომ $|\dot{z}_i(t)| < H, i = 1, 2, \dots$ მაშინ $z_i(t), i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბრად-ხარისხოვნად უწყვეტია.

მართლაც,

$$|z_i(t') - z_i(t'')| = \left| \int_{t'}^{t''} \dot{z}_i(s) ds \right| < H |t' - t''|.$$

აქედან გამომდინარეობს თანაბრად-ხარისხოვნად უწყვეტობა.

განსაზღვრება 2.7. $z(\cdot) \in L_1$ ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $N > 0$ რომ $|z(t)| \leq N$ თ. ყ. $t \in I$.

განსაზღვრება 2.8. ფუნქციათა მიმდევრობას $z_i(\cdot) \in L, i = 1, 2, \dots$ ეწოდება სუსტად კრებადი $z_0(\cdot)$ ფუნქციისკენ, თუ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ზომადი $\chi(t)$ სტრიქონ-ფუნქციისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b \chi(s) z_i(s) ds = \int_a^b \chi(s) z_0(s) ds.$$

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ფუნქციათა მიმდევრობა $z_i(\cdot) \in L, i = 1, 2, \dots$ სუსტად კრებადი $z_0(\cdot)$ ფუნქციისკენ, მაშინ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^t z_i(s) ds = \int_a^t z_0(s) ds, \quad \forall t \in I. \quad (2.13)$$

ლემა 2.5. თუ ფუნქციათა მიმდევრობა $z_i(\cdot) \in L, i = 1, 2, \dots$ თანაბარ-შემოსაზღვრულია, მაშინ მისგან შეიძლება გამოვეყნოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა.

თეორემა 2.4. ([16], გვ. 257). ვთქვათ $p: [t_0, \theta_1] \times U \rightarrow R_x^n$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო

$$P(t) = \{p(t, u) : u \in U\}$$

ამოზნეცილი სიმრავლე ვთქვათ

$$p_i(\cdot) \in L_1([t_0, \theta_1], R_x^n), \quad p_i(t) \in P(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{თ. გ. } [t_0, \theta_1] \text{-ზე.}$$

გარდა ამისა,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i(t) = p(t) \quad \text{სუსტად } [t_0, \theta_1] \text{-ზე.}$$

მაშინ

$$p(t) \in P(t) \quad \text{თ. გ. } [t_0, \theta_1] \text{-ზე}$$

და არსებობს ზომადი ფუნქცია $u(t) \in U, \quad t \in [t_0, \theta_1]$ ისეთი რომ

$$p(t, u(t)) = p(t) \quad \text{თ. გ. } [t_0, \theta_1] \text{-ზე.}$$

§3. თეორემა 1.1-ის დამტკიცება

ვთქვათ $w_i = (\tau_i, \theta_i, \sigma_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \in W_0, \quad i = 1, 2, \dots$, და

$$S(w_i) = \{x_i(t) = x(t; w_i), \quad t \in [\hat{\tau}, \theta_i]; \quad y_i(t) = y(t; w_i), \quad t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}$$

არის შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა, $w_i, \quad i = 1, 2, \dots$, არის მინიმიზირებადი მიმდევრობა

ე. ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(w_i) = \hat{\zeta} = \inf_{w \in W_0} \zeta(w).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმეთ, რომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \tau_0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = \sigma_0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \theta_0.$$

ცხადია, რომ

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(t, x_i(t), x_i(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0, \theta_i], \\ \dot{y}_i(t) = g(t, y_i(t), y_i(t - \sigma_i), v_i(t)), t \in [\theta_i, t_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0], \\ y_i(t) = \psi(t), t \in [\hat{\sigma}, \theta_i], \\ y_i(\theta_i) = q(\theta_i, x_i(\theta_i)) \end{cases}$$

და

$$\zeta(w_i) = \zeta(\tau_i, \theta_i, \sigma_i, x_i(\theta_i), y_i(t_1)).$$

ყოველ $w = (\tau, \theta, \sigma, u(\cdot), v(\cdot)) \in W$ ელემენტს შევუსაბამოთ ორსაფეხურიანი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = f(t, \alpha(t), h_1(t_0, \varphi, \alpha)(t - \tau), u(t)), t \in [t_0, \theta], \\ \dot{\beta}(t) = g(t, \beta(t), h_2(\theta, \psi, \beta)(t - \sigma), v(t)), t \in [\theta, t_1] \end{cases} \quad (3.1)$$

საწყისი პირობით

$$\alpha(t_0) = \varphi(t_0)$$

და შუალედური პირობით

$$\beta(\theta) = q(\theta, x(\theta)).$$

ცხადია, რომ

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(t, x_i(t), h_1(t_0, \varphi, x_i)(t - \tau_i), u_i(t)), t \in [t_0, \theta_i], \\ \dot{y}_i(t) = g(t, y_i(t), h_2(\theta_i, \psi, y_i)(t - \sigma_i), v_i(t)), t \in [\theta_i, t_1] \end{cases}$$

და პირობას

$$x_i(t_0) = \varphi(t_0), y_i(\theta_i) = q(\theta_i, x_i(\theta_i))$$

(იხ. (2.10) და (2.11)). ამრიგად,

$$S_1(w_i) = \{x_i(t), t \in [t_0, \theta_i]; y_i(t), t \in [\theta_i, t_1]\}$$

არის (3.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება $w_i = (\tau_i, \theta_i, \sigma_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \in W_0$ ელემენტს. არსებობს კომპაქტური სიმრავლეები $K_1 \subset O$ და $M_1 \subset Y$ ისეთი, რომ

$$x_i(t) \in K_1, t \in [t_0, \theta_i] \text{ და } y_i(t) \in M_1, t \in [\theta_i, t_1] \text{ (იხ. თეორემა 1.1-ის 1.2 პირობა).}$$

ვთქვათ $K_3 \subset O$ არის კომპაქტი, რომელიც შეიცავს K_1 -ის რაიმე მიდამოს, ხოლო $M_3 \subset O$ არის კომპაქტი, რომელიც შეიცავს M_1 -ის რაიმე მიდამოს. თეორემა 2.3-ის თანახმად საკმარისად დიდი i_0 -თვის არსებობს $S_1(w_i)$ ამონახსნის გაგრძელება

$$S_2(w_i) = \{x_{i1}(t) \in K_3, t \in [t_0 - \delta, \theta_i + \delta]; y_{i1}(t) \in M_3, t \in [\theta_i - \delta, t_1 + \delta]\}, i \geq i_0.$$

U, V სიმრავლეებისა და $x_{i1}(t), y_{i1}(t)$ ამონახსნების შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს რიცხვი $N > 0$ ისეთი, რომ $\forall i \geq i_0$ გვექნება

$$\begin{cases} |\dot{x}_{i1}(t)| = |f(t, x_{i1}(t), h_1(t_0, \varphi, x_{i1})(t - \tau_i), u_i(t))| \leq N, t \in [t_0 - \delta, \theta_0 + \delta], \\ |\dot{y}_{i1}(t)| = |g(t, y_{i1}(t), h_2(\theta_i, \psi, y_{i1})(t - \sigma_i), v_i(t))| \leq N, t \in [\theta_0 - \delta, t_1 + \delta]. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს $x_{i1}(t), i = 1, 2, \dots$ და $x_{i1}(t), i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობების თანაბარ-ხარისხოვნად უწყვეტობა (იხ. ლემა 2.4). არცელა-ასკოლის ლემის თანახმად, ამ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა, რომლებსაც კვლავ აღვნიშნავთ $x_{i1}(t), i = 1, 2, \dots$ და $x_{i1}(t), i = 1, 2, \dots$. ამრიგად,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i1}(t) = x_{01}(t) \text{ თანაბრად } [t_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \text{-ზე,}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_{i1}(t) = y_{01}(t) \text{ თანაბრად } [\theta_0 - \delta, t_1 + \delta] \text{-ზე.}$$

$x_{i1}(t)$ და $y_{i1}(t)$ ამონახსნები ჩავწეროთ ინტეგრალური სახით, გვექნება (იხ. ლემა 2.3)

$$x_{i1}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_{i1}(s), h_1(t_0, \varphi, x_{i1})(s - \tau_i), u_i(s)) ds, \quad t \in [t_0, \theta_0 + \delta], \quad (3.2)$$

$$y_{i1}(t) = q(\theta_i, x_{i1}(\theta_i)) + \int_{\theta_i}^t g(s, y_{i1}(s), h_2(\theta_i, \psi, y_{i1})(s - \sigma_i), v_i(s)) ds, \quad t \in [\theta_0 - \delta, t_1]. \quad (3.3)$$

გარდავქმნათ (3.2), შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\gamma_i(t) = f(t, x_{i1}(t), h_1(t_0, \varphi, x_{i1})(t - \tau_i), u_i(t)) - f(t, x_{01}(t), h_1(t_0, \varphi, x_{01})(t - \tau_0), u_i(t)),$$

$$s_{i1} = \min\{t_0 + \tau_i, t_0 + \tau_0\}, \quad s_{i2} = \max\{t_0 + \tau_i, t_0 + \tau_0\}.$$

ცხადია,

$$x_{i1}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_{01}(s), h_1(t_0, \varphi, x_{01})(s - \tau_0), u_i(s)) ds + \gamma_{i1}(t), \quad t \in [t_0, \theta_0 + \delta], \quad (3.4)$$

სადაც

$$\gamma_{i1}(t) = \int_{t_0}^t \gamma_i(s) ds.$$

შევაფასოთ $\gamma_{i1}(t)$, გვაქვს

$$|\gamma_{i1}(t)| \leq \int_{t_0}^{s_{i1}} |\gamma_i(s)| ds + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} |\gamma_i(s)| ds + \int_{s_{i2}}^{\theta_0} |\gamma_i(s)| ds = \gamma_{i2} + \gamma_{i3} + \gamma_{i4}.$$

გარდავქმნათ γ_{i2} : ვთქვათ $s_{i1} = t_0 + \tau_0$ ე. ი. $\tau_0 - \tau_i < 0$, მაშინ გვექნება

$$\gamma_{i2} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau_0} |\gamma_i(s)| ds.$$

ამ შემთხვევაში როცა $s \in (t_0, t_0 + \tau_0)$, მაშინ $s - \tau_i \in (t_0 - \tau_i, t_0 + \tau_0 - \tau_i) \subset (\hat{\tau}, t_0)$ და

$s - \tau_0 \in (t_0 - \tau_0, t_0) \subset (\hat{\tau}, t_0)$. ამიტომ $\gamma_i(s), s \in [t_0, t_0 + \tau_0]$ ექნება სახე

$$f(s, x_{i1}(s), \varphi(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, x_{01}(s), \varphi(s - \tau_0), u_i(s)). \quad (3.5)$$

ფუნქცია $f(s, x_1, x_2, u)$ თანაბრად უწყვეტია $[\hat{\tau}, \theta_0] \times K_3^2 \times U$ ამიტომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [f(s, x_{i1}(s), \varphi(s - \tau_i), u) - f(s, x_{01}(s), \varphi(s - \tau_0), u)] = 0 \text{ თანაბრად } (s, u) \in [t_0, t_0 + \tau_0] \times U.$$

ამრიგად,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(s) = 0 \text{ თანაბრად } s \in [t_0, t_0 + \tau_0].$$

ე. ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{i2} = 0. \quad (3.6)$$

ახლა ვთქვათ, $s_{i1} = t_0 + \tau_i$ ე. ი. $\tau_0 - \tau_i > 0$, როცა $s \in (t_0, t_0 + \tau_i)$, მაშინ

$$s - \tau_i \in (t_0 - \tau_i, t_0) \subset (\hat{\tau}, t_0) \text{ და } s - \tau_0 \in (t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_i - \tau_0) \subset (\hat{\tau}, t_0).$$

ანალოგიური მსჯელობით დავასკვნით, რომ როცა $s \in (t_0, t_0 + \tau_i)$ მაშინ $\gamma_i(t)$ ექნება კვლავ (3.5) სახე. მივიღებთ

$$\gamma_{i2} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i} |\gamma_i(s)| ds < \int_{t_0}^{t_0 + \tau_0} |f(s, x_{i1}(s), \varphi(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, x_{01}(s), \varphi(s - \tau_0), u_i(s))| ds \rightarrow 0, i \rightarrow \infty.$$

ამრიგად (3.6) ტოლობა სამართლიანია ყველა შემთხვევაში. შემდეგ, $|\gamma_i(s)|$ შემოსაზღვრულია ამიტომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{i3} = 0. \quad (3.7)$$

ახლა გარდავქმნათ γ_{i4} : ვთქვათ $s_{i2} = t_0 + \tau_i > t_0 + \tau_0$, თუ $s > t_0 + \tau_i$ მაშინ

$s - \tau_i > t_0, s - \tau_0 > t_0$. მივიღებთ

$$\gamma_{i4} = \int_{t_0 + \tau_i}^{\theta_0} |f(s, x_{i1}(s), x_{i1}(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, x_{01}(s), x_{01}(s - \tau_0), u_i(s))| ds.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $t_0 + \tau_0 - \tau_i > t_0 - \delta$. ცხადია რომ თუ $s > t_0 + \tau_0$ მაშინ $s - \tau_i > t_0 - \delta$ და $s - \tau_0 > t_0 - \delta$ აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\gamma_{i4} \leq \int_{t_0 + \tau_0}^{\theta_0} |f(s, x_{i1}(s), x_{i1}(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, x_{01}(s), x_{01}(s - \tau_0), u_i(s))| ds.$$

გვაქვს,

$$x_{i1}(s - \tau_i) - x_{01}(s - \tau_0) = x_{i1}(s - \tau_i) - x_{i1}(s - \tau_0) + x_{i1}(s - \tau_0) - x_{01}(s - \tau_0)$$

$$= \int_{s - \tau_i}^{s - \tau_0} \dot{x}_{i1}(\xi) d\xi + x_{i1}(s - \tau_0) - x_{01}(s - \tau_0) \rightarrow 0 \text{ როცა } i \rightarrow \infty.$$

ამ შემთხვევაში $\gamma_{i4} \rightarrow 0$. ვთქვათ $s_{i2} = t_0 + \tau_0 > t_0 + \tau_i$, თუ $s > t_0 + \tau_0$ მაშინ

$$s - \tau_i > t_0 + \tau_i - \tau_0 = t_0. \quad s - \tau_0 > t_0 + \tau_0 - \tau_0 = t_0.$$

მივიღებთ

$$\gamma_{i4} = \int_{t_0 + \tau_0}^{\theta_0} |f(s, x_{i1}(s), x_{i1}(s - \tau_i), u_i(s)) - f(s, x_{01}(s), x_{01}(s - \tau_0), u_i(s))| ds \rightarrow 0.$$

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში $\gamma_{i4} \rightarrow 0$. (3.6) -(3.7) პირობებისა და უკანასკნელის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $\gamma_{i1}(t) \rightarrow 0$ თანაბრად $t \in [t_0, \theta_0]$. გადავიდეთ ზღვარზე (3.4)-ში მივიღებთ

$$x_0(t) = \varphi(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_i(s)) ds, \quad (3.8)$$

სადაც

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ x_{01}(t), & t \in [t_0, \theta_0]. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P(s) = \{f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u) : u \in U\}, \quad p_i(s) = f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_i(s)).$$

ცხადია, რომ

$$p_i(\cdot) \in L_1([t_0, \theta_0], R_x^n), \quad p_i(s) \in P(s).$$

$p_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბრად-შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგან შეიძლება გამოვყოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა (იხ. ლემა 2.5), რომელსაც კვლავ აღვნიშნავთ $p_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$ ამრიგად

$$p_i(s) \rightarrow p(s) \text{ სუსტად } [t_0, \theta_0] \text{-ზე.}$$

თეორემა 2.4 თანახმად $p(s) \in P(s)$ და არსებობს $u_0(\cdot) \in \Omega$ ისეთი რომ

$$p(s) = f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_0(s)), s \in [t_0, \theta_0].$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით (3.8) -დან მივიღებთ

$$x_0(s) = \varphi(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^s p_i(s) ds = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^s p(s) ds = \int_{t_0}^s f(s, x_0(s), x_0(s - \tau_0), u_0(s)) ds.$$

ამრიგად,

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), x_0(t - \tau_0), u_0(t)), t \in [t_0, \theta_0], \\ x_0(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0]. \end{cases} \quad (3.9)$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის მსგავსად გარდავქმნათ (3.3), შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\lambda_i(t) = g(t, y_{i1}(t), h_2(\theta_i, \psi, y_{i1})(t - \sigma_i), v_i(t)) - g(t, y_{01}(t), h_2(\theta_0, \psi, y_{01})(t - \sigma_0), v_i(t)),$$

$$s_{i3} = \min\{\theta_i + \sigma_i, \theta_0 + \sigma_0\}, \quad s_{i4} = \max\{\theta_i + \sigma_i, \theta_0 + \sigma_0\}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$y_{i1}(t) = q(\theta_i, x_{i1}(\theta_i)) + \int_{\theta_0}^t g(s, y_{01}(s), h_2(\theta_0, \psi, y_{01})(s - \sigma_0), v_i(s)) ds + \lambda_{i1}(t) + \lambda_{i2}, \quad (3.10)$$

$$t \in [\theta_0 - \delta, t_1],$$

სადაც

$$\lambda_{i1}(t) = \int_{\theta_0}^i \lambda_i(s) ds, \quad \lambda_{i2} = \int_{\theta_{i1}}^{\theta_0} g(s, y_{i1}(s), h_2(\theta_i, \psi, y_{i1})(s - \sigma_i), v_i(s)) ds.$$

ცხადია, $\lambda_{i2} \rightarrow 0$. შევაფასოთ $\lambda_{i1}(t)$, გვაქვს

$$|\lambda_{i1}(t)| \leq \int_{\theta_0}^{s_{i3}} |\lambda_i(s)| ds + \int_{s_{i3}}^{s_{i4}} |\lambda_i(s)| ds + \int_{s_{i4}}^{t_1} |\lambda_i(s)| ds = \gamma_{i3} + \gamma_{i4} + \gamma_{i5}.$$

გარდავქმნათ λ_{i3} : ვთქვათ $s_{i3} = \theta_0 + \sigma_0$ ე. ი. $\theta_0 + \sigma_0 < \theta_i + \sigma_i$, მაშინ გვქვია

$$\lambda_{i3} = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \sigma_0} |\lambda_i(s)| ds.$$

ამ შემთხვევაში როცა $s \in (\theta_0, \theta_0 + \sigma_0)$, მაშინ $s - \sigma_i \in (\theta_0 - \sigma_i, \theta_0 + \sigma_0 - \sigma_i) \subset (\hat{\sigma}, \theta_i)$ და $s - \tau_0 \in (\theta_0 - \tau_0, \theta_0) \subset (\hat{\sigma}, \theta_0)$. ამიტომ $\lambda_i(s), s \in [\theta_0, \theta_0 + \sigma_0]$ ექნება სახე

$$g(s, y_{i1}(s), \psi(s - \sigma_i), v_i(s)) - g(s, y_{01}(s), \psi(s - \sigma_0), v_i(s)). \quad (3.11)$$

ფუნქცია $g(s, y_1, y_2, v)$ თანაბრად უწყვეტია $[\hat{\sigma}, t_1] \times M_3^2 \times V$ ამიტომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [g(s, y_{i1}(s), \psi(s - \sigma_i), v) - g(s, y_{01}(s), \psi(s - \sigma_0), v)] = 0 \text{ თანაბრად } (s, v) \in [\theta_0, t_0 + \theta_0] \times V.$$

ამრიგად, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i(s) = 0$ თანაბრად $s \in [\theta_0, \theta_0 + \sigma_0]$.

ე. ი.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{i3} = 0. \quad (3.12)$$

ახლა ვთქვათ, $s_{i3} = \theta_i + \sigma_i$ ე. ი. $\theta_i + \sigma_i < \theta_0 + \sigma_0$, როცა $s \in (\theta_0, \theta_i + \sigma_i)$, მაშინ

$$s - \sigma_i \in (\theta_0 - \sigma_i, \theta_i) \subset (\hat{\sigma}, \theta_1) \text{ და } s - \sigma_0 \in (\theta_0 - \sigma_0, \theta_i + \sigma_i - \sigma_0) \subset (\theta_0 - \sigma_0, \theta_0) \subset (\hat{\sigma}, \theta_1).$$

ანალოგიური მსჯელობით დავასკვნით, რომ როცა $s \in (\theta_0, \theta_i + \sigma_i)$ მაშინ $\lambda_i(t)$ ექნება კვლავ (3.11) სახე. მივიღებთ

$$\gamma_{i3} = \int_{\theta_0}^{\theta_i + \sigma_i} |\lambda_i(s)| ds < \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \sigma_0} |g(s, y_{i1}(s), \psi(s - \sigma_i), v_i(s)) - g(s, y_{01}(s), \psi(s - \sigma_0), v_i(s))| ds \rightarrow 0, i \rightarrow \infty.$$

ამრიგად (3.12) ტოლობა სამართლიანია ყველა შემთხვევაში. შემდეგ, $|\lambda_i(s)|$ შემოსაზღვრულია, ამიტომ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{i4} = 0. \quad (3.13)$$

ახლა გარდავქმნათ γ_{i5} : ვთქვათ $s_{i4} = \theta_i + \sigma_i > \theta_0 + \sigma_0$, თუ $s > \theta_i + \sigma_i$ მაშინ

$$s - \sigma_i > \theta_i, s - \sigma_0 > \theta_i + \sigma_i - \sigma_0 > \theta_0. \text{ მივიღებთ}$$

$$\gamma_{i5} = \int_{\theta_i + \sigma_i}^{\theta_i} |g(s, y_{i1}(s), y_{i1}(s - \sigma_i), v_i(s)) - f(s, y_{01}(s), y_{01}(s - \sigma_0), v_i(s))| ds.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $\theta_0 + \sigma_0 - \sigma_i > \theta_0 - \delta$. ცხადია რომ თუ $s > \theta_0 + \sigma_0$ მაშინ $s - \sigma_i > \theta_0 - \delta$ და $s - \theta_0 > \theta_0 - \delta$ აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\gamma_{i5} \leq \int_{\theta_0 + \sigma_0}^{\theta_i} |g(s, y_{i1}(s), y_{i1}(s - \sigma_i), v_i(s)) - g(s, y_{01}(s), y_{01}(s - \sigma_0), v_i(s))| ds.$$

გვაქვს,

$$y_{i1}(s - \sigma_i) - y_{01}(s - \sigma_0) = y_{i1}(s - \sigma_i) - y_{i1}(s - \theta_0) + y_{i1}(s - \theta_0) - y_{01}(s - \sigma_0)$$

$$= \int_{s - \sigma_i}^{s - \sigma_0} \dot{y}_{i1}(\xi) d\xi + y_{i1}(s - \sigma_0) - y_{01}(s - \sigma_0) \rightarrow 0 \text{ როცა } i \rightarrow \infty.$$

ამრიგად, $\lambda_{i5} \rightarrow 0$. ვთქვათ $s_{i4} = \theta_0 + \sigma_0 > \theta_i + \sigma_i$, თუ $s > \theta_0 + \sigma_0$ მაშინ.

$s - \sigma_i > \theta_0 + \sigma_0 - \sigma_i > \theta_i + \sigma_i - \sigma_i = \theta_i$, $s - \sigma_0 > \theta_0 + \sigma_0 - \sigma_0 = \theta_0$. მივიღებთ,

$$\lambda_{i5} = \int_{\theta_0 + \sigma_0}^{\theta_i} |g(s, y_{i1}(s), y_{i1}(s - \sigma_i), v_i(s)) - f(s, y_{01}(s), y_{01}(s - \sigma_0), v_i(s))| ds$$

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში $\lambda_{i5} \rightarrow 0$. (3.12)-(3.13) პირობებისა და უკანასკნელი თანაფარდობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ

$$\lambda_{i1}(t) \rightarrow 0 \text{ თანაბრად } t \in [\theta_0, t_1].$$

დავამტკიცოთ

$$q(\theta_i, x_{i1}(\theta_{i1})) \rightarrow q(\theta_0, x_{i1}(\theta_0)) = q(\theta_0, x_0(\theta_0)).$$

ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ $x_{i1}(\theta_i) \rightarrow x_{01}(\theta_0)$. მართლაც,

$$x_{i1}(\theta_i) - x_{01}(\theta_0) = x_{i1}(\theta_i) - x_{i1}(\theta_0) + x_{i1}(\theta_0) - x_{i1}(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_i} \dot{x}_{i1}(\xi) d\xi + x_{i1}(\theta_0) - x_{i1}(\theta_0) \rightarrow 0.$$

გადავიდეთ ზღვარზე (3.10)-ში მივიღებთ

$$y_0(t) = q(\theta_0, x_0(\theta)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t g(s, y_0(s), y_0(s - \sigma_0), v_i(s)) ds, \quad (3.14)$$

სადაც

$$y_0(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [\hat{\sigma}, \theta_0), \\ y_{01}(t), & t \in [\theta_0, t_1]. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები :

$$\hat{P}(s) = \{g(s, y_0(s), y_0(s - \sigma_0), v) : v \in V\}, \quad \hat{p}_i(s) = g(s, y_0(s), y_0(s - \sigma_0), v_i(s)).$$

ცხადია, რომ

$$\hat{p}_i(\cdot) \in L_1([\theta_0, t_1], R_y^m), \quad \hat{p}_i(s) \in \hat{P}(s).$$

$\hat{p}_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$ მიმდევრობა თანაბრად-შემოსაზღვრულია, მისგან შეიძლება გამოვყოთ

სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა, რომელსაც კვლავ აღვნიშნავთ

$\hat{p}_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$ ამრიგად,

$$\hat{p}_i(s) \rightarrow \hat{p}(s) \text{ სუსტად } [\theta_0, t_1] \text{-ზე.}$$

თეორემა 2.4 თანახმად $\hat{p}(s) \in \hat{P}(s)$ და არსებობს $v_0(\cdot) \in \Delta$ ისეთი რომ

$$\hat{p}(s) = g(s, y_0(s), y_0(s - \sigma_0), v_0(s)), \quad s \in [\theta_0, t_1].$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით (3.14) -დან მივიღებთ

$$y_0(t) = q(\theta_0, x_0(\theta_0)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\theta_0}^t \hat{p}_i(s) ds = q(\theta_0, x_0(\theta_0)) + \int_{\theta_0}^t \hat{p}(s) ds = \int_{\theta_0}^t g(s, y_0(s), y_0(s - \sigma_0), v_0(s)) ds.$$

ამრიგად,

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = g(t, y_0(t), y_0(t - \theta_0), v_0(t)), & t \in [\theta_0, t_1], \\ y_0(t) = \psi(t), & t \in [\hat{\sigma}, \theta_0), y_0(\theta_0) = q(\theta_0, x_0(\theta_0)). \end{cases} \quad (3.15)$$

ცხადია, $w_0 = (\tau_0, \theta_0, \sigma_0, u_0(\cdot), v_0(\cdot)) \in W$ და მისი შესაბამისი ამონახსნი არის

$$S(w_0) = \{x_0(t), t \in [\hat{\tau}, \theta_0]; y_0(t), t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}.$$

(იხ. (3.9) და (3.15)). ახლა დავამტკიცოთ, რომ $w_0 \in W_0$ და იგი ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. $w_i \in W_0$ ამიტომ შესაბამისი ამონახსნი

$$S(w_i) = \{x_i(t) = x(t; w_i), t \in [\hat{\tau}, \theta_i]; y_i(t) = y(t; w_i), t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}$$

აკმაყოფილებს პირობებს :

$$\begin{cases} \rho(t, x_i(t)) \geq 0, t \in [t_0, \theta_i], \\ \zeta(t, y_i(t)) \geq 0, t \in [\theta_i, t_1], \end{cases}$$

და

$$\Phi(x_i(\theta_i), y_i(t_1)) = 0.$$

ვთქვათ θ_i მიისწრაფის θ_0 -კენ მარცხნიდან ე. ი. ყოველთვის $\theta_i < \theta_0$. ვთქვათ $\hat{\theta} \in (t_0, \theta_0)$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. საკმარისად დიდი i -სთვის $\theta_i > \hat{\theta}$, ამიტომ ადგილი აქვს უტოლობას $\rho(\hat{\theta}, x_i(\hat{\theta})) \geq 0$. გადავიდეთ ზღვარზე, მივიღებთ $\rho(\hat{\theta}, x_0(\hat{\theta})) \geq 0$.

$\hat{\theta} \in (t_0, \theta_0)$ წერტილი ნებისმიერად იყო ადებული, ამიტომ $\rho(t, x_0(t)) \geq 0 \forall t \in (t_0, \theta_0)$.

რადგანაც $x_i(t_0) = x_0(t_0) = x_0$ ამიტომ $\rho(t_0, x_0(t_0)) = \rho(t_0, x_i(t_0)) \geq 0$. შემდეგ,

$$\rho(\theta_0, x_0(\theta_0)) = \rho(\theta_0, x_{01}(\theta_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\theta_i, x_{i1}(\theta_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\theta_i, x_i(\theta_i)) \geq 0.$$

ამ შემთხვევაში $\rho(t, x_i(t)) \geq 0, t \in [t_0, \theta_0]$ დამტკიცებულია. ვთქვათ θ_i მიისწრაფის θ_0 -კენ მარჯვნიდან, მაშინ $\rho(t, x_i(t)) \geq 0, t \in [t_0, \theta_0]$, გადავიდეთ ზღვარზე მივიღებთ $\rho(t, x_0(t)) \geq 0, t \in [t_0, \theta_0]$. ე. ი. $x_0(t)$ ამონახსნის აკმაყოფილებს ფაზურ შეზღუდვას. ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დამტკიცდეს $\zeta(t, y_0(t)) \geq 0, t \in [\theta_0, t_1]$, ხოლო

$$\Phi(x_0(\theta_0), y_0(t_1)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(x_i(\theta_i), y_i(t_1)) = 0.$$

$w_0 \in W_0$ ე. ი. იგი არის დასაშვები.

$$\hat{\zeta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(w_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta(\tau_i, \theta_i, \sigma_i, x_i(\theta_i), y_i(t_i)) = \zeta(\tau_0, \theta_0, \sigma_0, x_0(\theta_0), y_0(t_1)).$$

ამრიგად, w_0 ანიჭებს ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას ე. ი. იგი არის ამოცანის ამონახსნი.

§ 4 თეორემა 1.2-1.4 დამტკიცება

თეორემა 1.2-ის დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ თეორემა 1.1 -ის 1.3 პირობის მართებულობა, ცხადია რომ დანარჩენი პირობების შესრულება უზრუნველყოფილია. ადვილი საჩვენებელია, რომ 1.3 პირობა გამომდინარეობს 1.5 პირობიდან. მართლაც, ვთქვათ $z_1, z_2 \in P_1(t, x_1, x_2)$ ნებისმიერი წერტილებია. $P_1(t, x_1, x_2)$ სიმრავლის განმარტების ძალით არსებობენ წერტილები $u_1, u_2 \in U$ ისეთი რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$z_1 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u_1, \quad z_2 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u_2.$$

ნებისმიერი $\lambda \in [0, 1]$ გვაქვს

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2].$$

U სიმრავლის ამოზნექილობის გამო დავასკვნით, რომ $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in U$. ამრიგად,

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = A(t, x_1, x_2) + B(t, x_1, x_2)u_3 \in P_1(t, x_1, x_2),$$

ე. ი. სიმრავლე $P_1(t, x_1, x_2)$ ამოზნექილია. ანალოგიურად მტკიცდება $P_2(t, y_1, y_2)$ სიმრავლის ამოზნექილობა. თეორემა 1.1-ის ყველა მოთხოვნა შესრულებული, ამიტომ ამონახსნის არსებობა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.3-ის დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ თეორე-

მა 1.2 -ის 1.6 პირობის მართებულობა, ცხადია რომ დანარჩენი პირობები შესრულებულია. ამისათვის გამოვიყენოთ კოშის ფორმულა (იხ. თეორემა 2.1). ჩვენს შემთხვევაში გვექნება შემდეგი კოშის ამოცანები:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B_1(t)x(t - \tau) + C_1(t)u(t), t \in [t_0, \theta], \\ x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0] \end{cases}$$

და

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A_2(t)y(t) + B_2(t)y(t - \sigma) + C_2(t)v(t), t \in [\theta, t_1], \\ y(t) = \psi(t), t \in [\hat{\sigma}, \theta), y(\theta) = q(\theta, x(\theta)). \end{cases}$$

კოშის ფორმულის ძალით გვექნება :

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} Y(s; t, \tau) B_1(s + \tau) \varphi(s) ds + \int_{t_0}^t Y(s; t, \tau) C_1(s) u(s) ds, t \in [t_0, \theta], \quad (4.1)$$

$$y(t) = q(\theta, x(\theta)) + \int_{\theta - \sigma}^{\theta} Y_1(s; t + \sigma, \sigma) B_2(s + \sigma) q(s, x(s)) ds + \int_{\theta}^t Y_1(s; t, \sigma) C_2(s) v(s) ds, t \in [\theta, t_1], \quad (4.2)$$

სადაც $Y(s; t, \tau)$, $t_0 \leq s \leq t \leq \theta \leq \theta_1$, არის მატრიც-ფუნქცია განზომილებით $n \times n$, იგი აკმაყოფილებს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას წინმსწრები არგუმენტით

$$\frac{\partial}{\partial s} Y(s; t, \tau) = -Y(s; t, \tau) A_1(s) - Y(s + \tau; t, \tau) B_1(s + \tau), t_0 \leq s \leq t \leq \theta \leq \theta_1$$

და საწყის პირობას

$$Y(s; t, \tau) = \begin{cases} E, s = t, \\ \Theta, s > t, \end{cases}$$

სადაც E არის ერთეულოვანი მატრიცა განზომილებით $n \times n$, ხოლო Θ ნულოვანი მატრიცა; ანალოგიურად $Y_1(s; t, \sigma)$, $\theta_0 \leq \theta \leq s \leq t \leq t_1$, არის მატრიც ფუნქცია განზომილებით $m \times m$, იგი აკმაყოფილებს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას წინმსწრები არგუმენტით

$$\frac{\partial}{\partial s} Y_1(s; t, \sigma) = -Y_1(s; t, \sigma) A_2(s) - Y_1(s + \sigma; t, \sigma) B_2(s + \sigma), \quad \vartheta_0 \leq \theta \leq s \leq t \leq t_1$$

და საწყის პირობას

$$Y_1(s; t, \sigma) = \begin{cases} E_1, & s = t, \\ \Theta_1, & s > t, \end{cases}$$

სადაც E_1 არის ერთეულოვანი მატრიცა განზომილებით $m \times m$, ხოლო Θ_1 ნულოვანი მატრიცა. ცხადია, რომ U და V სიმრავლეების შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს რიცხვები $\alpha > 0$ და $\gamma > 0$ ისეთი რომ

$$\|u\| = \sup\{|u(t)| : t \in [t_0, \vartheta_1]\} \leq \alpha, \quad \forall u(\cdot) \in \Omega; \quad \|v\| = \sup\{|v(t)| : t \in [\vartheta_0, t_1]\} \leq \gamma, \quad \forall v(\cdot) \in \Delta.$$

შევაფასოთ $\|x\|(\hat{\tau}) = \sup\{|x(t)| : t \in [\hat{\tau}, \vartheta_1]\}$ და $\|y\|(\hat{\sigma}) = \sup\{|y(t)| : t \in [\hat{\sigma}, t_1]\}$. გვაქვს,

$$\|x\|(\hat{\tau}) \leq \|\varphi\| + \|x\|(t_0) \leq \|\varphi\| + |\varphi(t_0)| + \|Y\| \|B_1\| \|\varphi\| d_1 + \alpha \|Y\| \|C_1\| (\vartheta_1 - t_0) = \alpha_1,$$

$$\|y\|(\hat{\sigma}) \leq \|\psi\| + \|y\|(\hat{\sigma}) \leq \|\psi\| + \|q\| + \|Y_1\| \|B_2\| \|g\| h_1 + \|Y_1\| \|C_2\| \gamma (t_1 - \vartheta_0) = \gamma_1,$$

სადაც

$$\|Y\| = \sup\{|Y(s; t, \tau)| : (s, t, \tau) \in \Pi\}, \quad \|B_1\| = \{B_1| : t \in [t_0, \vartheta_1]\}, \quad \|C_1\| = \{C_1| : t \in [t_0, \vartheta_1]\},$$

$$\|Y_1\| = \sup\{|Y_1(s; t, \sigma)| : (s, t, \tau) \in [\vartheta_0, t] \times [\vartheta_0, t_1] \times [h_0, h_1]\}, \quad \|g\| = \sup\{|g(t, x)| : t \in [\hat{\sigma}, \vartheta_1], \|x\| \leq \alpha_1\},$$

$$\|B_2\| = \{B_2| : t \in [\vartheta_0, t_1]\}, \quad \|C_2\| = \{C_2| : t \in [\vartheta_0, t_1]\}.$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში

$$K_1 = \{x \in R_x^n : \|x\| \leq \alpha_1\}, \quad M_1 = \{y \in R_y^m : \|y\| \leq \gamma_1\}.$$

თეორემა 1.2-ის ყველა პირობა შესრულებულია. აქედან გომოდინარე ამონახსნი არსებობს.

თეორემა 1.4-ის დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x^0(t) = \int_{t_0}^t f^0(s, x(s), x(s-\tau), u(s)) ds, t \in [t_0, \theta], y^0(t) = \int_t^{t_1} g^0(s, y(s), y(s-\sigma), v(s)) ds, t \in [\theta, t_1];$$

$$\hat{x}(t) = (x^0(t), x(t))^T, \hat{y}(t) = (y^0(t), y(t))^T.$$

ამ აღნიშვნებში ამოცანა ინტეგრალური ფუნქციონალით შეიძლება ასე ჩაიწეროს :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), t \in [t_0, \theta], \\ \frac{d}{dt} \hat{y}(t) = G(t, y(t), y(t-\sigma), v(t)), t \in [\theta, t_1], \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = (0, \varphi(t))^T, t \in [\hat{\tau}, \theta], \hat{y}(t) = (0, \psi(t))^T, t \in [\hat{\sigma}, \theta), \hat{y}(\theta) = (0, q(\theta, x(\theta)))^T,$$

$$\begin{cases} \rho(t, x(t)) \geq 0, t \in [t_0, \theta], \\ \varsigma(t, y(t)) \geq 0, t \in [\theta, t_1], \end{cases}$$

$$\Phi(x(\theta), y(t_1)) = 0;$$

$$x^0(\theta) + y^0(t_1) \rightarrow \min.$$

ეს ამოცანა არის (1.1)-(1.5) ამოცანის კერძო შემთხვევა, რომლისთვის შესრულებულია თეორემა 1.1 -ის პირობები. ამრიგად, ამონახსნის არსებობს.

დასკვნა

არაწრფივი ორსაფეხურიანი ოპტიმალური ამაცანისთვის მუდმივი დაგვიანებებით, წყვეტილი შუალედური პირობით და ფაზური შეზღუდვებით, ზოგადი და ინტეგრალური ფუნქციონალით დამტკიცებულია ოპტიმალური დაგვიანებების, საფეხურის ცვლილების ოპტიმალური მომენტისა და ზომად ფუნქციათა კლასში ოპტიმალური მართვის არსებობა. ძირითადი შედეგი დაკონკრეტებულია კვაზიწრფივი და წრფივი ორსაფეხურიანი ამოცანებისთვის.

ლიტერატურა

1. H. H. Hall and E. D. Zambelli, On the optimization of multistage rockets, *JETPropulsion* **28** (7)(1958), 463-465.
2. V. V. Velichenko, Optimal control of composite systems, (Russian) *Dokl. Akad.Nauk SSSR* **176** (1967), 754-756.
3. V. A. Medvedev and V. N. Rozova, Optimal control of stepped systems, *Avtom.Telemekh.* **3** (1972), 15-23.
4. J. Warga, Optimal control of differential and functional equations, *Academic Press*, New York-London, 1972.
5. V. G. Boltyanski, The problem of optimization with change of phase space, (Russian) *Differentsial'nye Uravneniya* **19** (3)(1983), 518-521.
6. M. S. Nikolskiy M.S. On a variable structure variational problem, (Russian) *Vestnik MGU. Ser. vych. mat. i kibernetika.*, **2** (1987), 36-41.
7. K. Mansimov , M. Nasiyati, Necessary optimality conditions of second order in discrete two-parameter stepwise control problems, *Simin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.*, **36-37** (2010-2011), 51-65.
8. A. I. Arsenashvili, An optimal control problem for step-by-step systems with delay, (Russian) *Trudy Inst. Sistem Upravleniya Akad. Nauk Gruzin. SSR* **24** (1) (1985), , 17-28.
9. N. M. Avalishvili, An existence theorem for a class of optimal problems with switching and variable delays, (Russian) *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR* **116** (1) (1984), 33-35.
10. I. K. Gogodze, About optimal control of systems, which changes his structure on contiguous intervals of time, (Russian) *Trudy Inst. Sistem Upravleniya Akad. Nauk Gruzin. SSR* **16**(1980), 5-9.
11. G. Kharatishvili and T. Tadumadze, The problem of optimal control for nonlinear systems with variable structure, delays and piecewise continuous prehistory, *Mem.Differential Equations Math. Phys.* **11**(1997), 67-88.
12. T. Tadumadze, On the existence of an optimal element in two-stage optimal problems with delays, *Georgian Math. J.*, **20** (3) (2013) , 601-623.
- 13.Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалишвили, Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой, в сб. "Оптимальные задачи в системах с переменной структурой", Изд-во ТГУ, Тбилиси , 1985, 100-154 .
- 14.Nino Burjanadze, Salome Chachanidze, On the existence of solutions of some classes neutral and delay two-stage optimal problems, *XXXIV International Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematicsof Ivane Javakhisvili Tbilisi State University , Book of Abstracts*, Tbilisi, 2020, p. 59.

- 15.. Tadumadze, Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **70** (2017), 7-97.
- 16.I. Eklund, R. Temam, Convex analysis and variational problems, *North-Holland*, Amsterdam, 1976.