არაერთგვაროვანი პიეზოელექტრული დრეკადი ღეროსთვის სტატიკის და რხევის ზოგიერთი ამოცანის შესახებ

სამაგისტრო ნაშრომი წარდგენილია
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტზე
გამოყენებითი მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის ხარისხის მინიჭების
მოთხოვნის შესაბამისად

არჩილი საყევარაშვილი
ხელმძღვანელი: პროფ. გიორგი ჯაიანი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

თბილისი 2020

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია არაერთგვაროვანი პიეზოელექტრული დრეკადი ღეროსთვის სტატიკისა და რხევის რამდენიმე ამოცანა. მოთხოვნილია შეზღუდვა, რომ სხეული დეფორმირდეს მხოლოდ x_3 სივრცითი ღერძის გასწვრივ და განხილულია შემთხვევა, როდესაც ყველა ფუნქცია დამოკუდებულია მხოლოდ t დროსა და/ან x_3 სივრცით ცვლადზე. აღნიშნული მასალის დეფორმაცია და რხევა შესწავლილ იქნა იმ შემთხვევებისთვის, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს და როდესაც ისინი წარმოადგენენ x_3 სივრცითი ცვლადის ხარისხოვან ფუნქციებს, ე.ი. მოიცემიან შემდეგი სახით: $const. \times x_3^\kappa$, სადაც $\kappa = const. \in (0,1)$. მოცემული მუხტის სიმკვრივისა (f_e) და x_3 ღერძის გასწვრივ მოცულობითი ძალების მდგენელის (Φ_3) პირობებში შესწავლილ იქნა საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. ამონახსნები გადაადგილების ვექტორისთვის (u_3), ასევე ელექტრული (χ) და მაგნიტური (η) პოტენციალებისთვის ჩაიწერა ანალიზური სახით (მუდმივკოეფიციენტებიანი შემთხვევა) ან მწკრივის სახით (როდესაც კოეფიციენტები მოიცემა x_3 ცვლადის ხარისხოვანი ფუნცქციის სახით) და შესწავლილ იქნა აღნიშნული მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის საკითხი. მოცულობითი ძალების x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ მდგენელებს დაედოთ პირობა, იმისათვის, რომ დეფორმაცია ყოფილიყო მხოლოდ x_3 ღერძის გასწვრივ. მუდმივი კონსტიტუციური კოეფიციენტების შესაბამისი ამოცანის ამონახსნები კონკრეტული მასალისთვის ($CoFe_2O_4$-ის და $BaTiO_3$-ის ნარევი) წარმოდგენილ იქნა გრაფიკების სახით MATLAB-ის მეშვეობით.

In the present work several problems on deformation and oscillation of non-homogeneous piezoelectric elastic beam is studied. The deformation is limited to be only along x_3 axis and it is assumed that all functions depend on time t and/or spatial variable x_3. Deformations and oscillations of such material was studied in the case when the constitutive coefficients were constants and when they were power functions of spatial variable x_3, i.e. equal to x_3^κ for some $\kappa = const. \in (0,1)$. With given charge density (f_e) and volume force along x_3 axis (Φ_3), initial-boundary value problems were studied. Solutions for displacement vector (u_3) as well as electric (χ) and magnetic (η) potentials that arise during the deformation were written in analytic form (constant-coefficient case) or as an infinite series (coefficients given power functions of variable x_3) and absolute uniform convergence of these series were studied. Furthermore, volume force components along x_1 and x_2 axis were found for which the deformation will be limited along x_3 axis. The solutions for the case when constitutive coefficient were constants were plotted for specific material (mixture of $CoFe_2O_4$ and $BaTiO_3$) using MATLAB.

შესავალი

მეცნიერების, ინდუსტრიისა და ტექნოლოგიების განვითარებამ ერთი მხრივ შესაძლებელი გახადა სხვადასხვა ფიზიკური თვისებების (პიეზოელექტრული, პიეზომაგნიტური, მრავალკომპონენტიანი ნაერთები, ბიომასალები, მეტამასალები და ა.შ.) მქონე ისეთი ახალი რთული შედგენილი მასალების შექმნა, რომლებიც ბუნებაში თავისუფალი სახით არ გვხვდება. მეორეს მხრივ, ასეთი ტიპის ახალი მასელები შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს იმავე სფეროების განსავითარებლად. რამდენიმე მაგალითი მოიცავს პიეზოელექტრულ სენსორებს ვიბრაციის დასაფიქსირებლად ([24]), მაღალი სიზუსტის ძრავებს ([10]), მაღალი გამძლეობისა და სიმტკიცის მასალებს ([29]) ან მასალებს, რომლებიც განაპირობებს მოხმარებული ენერგიის ([23][30]), წარმოების ფასისა და სენსორებისა თუ ძრავების ზომის ([10][24]) შემცირებას.

პიეზოელექტრული მასალების გამოყენება არ იყო გავრცელებული პირველ მსოფლიო ომამდე, როდესაც კვარცი იქნა გამოყენებული სონარში, როგორც ულტრაბგერითი წყაროების გამაძლიერებელი ექოლოკაციით წყალქვეშა გემების დასაფიქსირებლად ([31]). თუმცა, დღესდღეობით მსგავსი ტიპის მასალებს ვხვდებით ყოველდღიურ ცხოვრებაში ისეთ მოწყობილობებშიც კი, როგორიცაა დინამიკი, ყურსასმენი თუ მიკროფონი.

ახალი ტიპის მასალების შექმნის გაზრდილმა მოთხოვნამ აუცილებელი გახადა მათემატიკური შესწავლა იმისა, თუ როგორ იქცევიან ისინი სხვადასხვა ფიზიკური ველის გავლენის პირობებში.

კრისტალებში პირდაპირი პიეზოელექტრული ეფექტი პირველად აღმოჩენილ იქნა ძმები ჟაკ კიურის (1856-1941) და პიერ კიურის (1859-1906) მიერ ([5][6]). მათ აღმოაჩინეს, რომ ზოგიერთი მასალის (როგორიცაა კვარცი, როშელის მარილი, ტოპაზი და სხვა) გაჭიმვა და შეკუმშვა წარმოქმნიდა მოდებული ძალის პროპორციულ და საპირისპირო პოლარობის ელექტრულ ძაბვას. სიტყვა პიეზოელექტრობა მომდინარეობს ბერძნული ენიდან და ნიშნავს ელექტრობას მიღებულს ძალების ზემოქმედების შედეგად. მოგვიანებით, თერმოდინამიკის კანონებზე დაყრდნობით ლიპმანმა ([21]) ივარაუდა შებრუნებული პიეზოელექტრული თვისების არსებობა, რომელიც ექსპერიმენტულად დაადასტურეს ძმებმა კიურებმა 1881 წელს.

რაც შეეხება მაგნიტოელექტრულ ეფექტს, მისი არსებობა პირველად ივარაუდეს ლანდაუმ და ლიფშიცმა 1957 წელს ([20]), რაც მოგვიანებით ექსპერიმენტულად დადასტურდა ანტიფერომაგნიტური Cr_2O_3 კრისტალისთვის ([2][9]).

ელექტრომაგნიტური ეფექტები მყარ სხეულებში შესწავლილ იქნა ვ. ნოვაცკის ([37]), პ. დენიევას ([31]) მიერ. კვლევების სხვა მაგალითები შესაძლებელია იხილოთ შემდეგ ლიტერატურებში [1][8][33][34].

თერმო-პიეზო-ელექტრო-მაგნეტო-დრეკადი სხეულის მმართველი განტოლებები მოცემულია მაგ. გ. ჯაიანის ნაშრომში [13]. მმართველი განტოლებები შედგება შემდეგი განტოლებებისა და დამოკიდებულებებისგან: 1. მოძრაობის განტოლებები; 2. კინემატიკური დამოკიდებულებები; 3. კონსტიტუციური განტოლებები. კონსტიტუციური განტოლებები და მუდმივები (როგორიცაა პიეზოელეცქტრული და პიეზომაგნიტური კოეფიციენტები, დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევადობა და სხვა) დგინდება ექსპერიმენტული კვლევების შედეგად.

სხეულის დეფორმაციის აღმწერ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისთვის საწყისი და/ან

სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია დაკავშირებული იყოს გარკვეულ სირთულეებთან, როდესაც, მაგალითად განიხილება წამახვილებული ფირფიტა, რომლის სისქეც საზღვირს ნაწილზე ან მთელ საზღვარზე ქრება. 1955 წელს ი. ვეკუამ გამოაქვეყნა ნაშრომი, სადაც მან აღწერა დრეკადი პრიზმული გარსის ახალი მოდელი ([16]). 1965 წელს მან მავე მოდელით აღწერა სტანდარტული გარსები ([17]). შემდგომში, ამოცანა შესწავლილ იქნა სხვადასხვა ტიპის მასალებისთვის გ. ჯაიანის ([11][12][13][14][15]), ნ. ჩინჩალაძის ([4][25][26][27][28]), თ. ბუჩუკურის, თ. ჭკადუას და დ. ნატროშვილის ([3][7][35][36]) მიერ.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ზოგიერთი ამოცანა არაერთგვაროვანი პიეზოელექტრული დრეკადი ღეროს დეფორმაციის და რხევის შესახებ. ღერო შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც მუდმივი სიმაღლის, სისქისა და სიგანის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედი (ზოგად შემთხვევაში ღეროს სიმაღლე და სიგანე შეიძლება იყოს ცვლადი, თუმცა, აღნიშნულ ნაშრომში განხილულია შემთხვევა, როდესაც ისინი წარმოადგენენ მუდმივებს). განიხილა ამოცანები შემდეგი შეზღუდვით - როდესაც სხეული დეფორმირდება მხოლოდ x_3 ღერძის გასწვრივ და ყველა ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ x_3 სივრცით ცვლადზე (და t დროზე დინამიკის შემთხვევაში). მთავარ ამოცანას წარმოადგენს მოცემული მუხტის სიმკვრივისა (f_e) და x_3 ღერძის გასწვრივ მოცულობითი ძალის მდგენელის (Φ_3) პირობებში გადაადგილების ვექტორის (u_3), ელექტრული პოტენციალისა (χ) და მაგნიტური პოტენციალის (η) პოვნა. საბოლოოდ, მოცულობითი ძალების x_1 და x_2 ღერძების გასწვრივ კომპონენტებს ედებათ პირობა, რაც ფიზიკური თვალსაზრისით გულისხმობს შემდეგს: თუ როგორი მოცულობითი ძალებით უნდა ვიმოქმედოთ სხეულზე აღნიშნული ღერძების გასწვრივ იმისათვის, რომ სხეული დეფორმირდეს მხოლოდ x_3 ღერძის მიმართულებით.

ნაშრომი შედგება შემდეგი პარაგრაფებისგან: პარაგრაფში 1 მიღებულია პიეზოელექტრული დრეკადი მასალის დეფორმაციის აღმწერი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ისეთი შეზღუდვის დროს, როდესაც სხეული დეფორმირდება მხოლოდ x_3 სივრცითი ღერძის გასწვრივ; პარაგრაფში 2 განხილულია სტატიკის (2.1) და რხევის (2.2) ამოცანა, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს; პარაგრაფში 3 განხილულია ამოცანა, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ x_3 სივრცითი ცვლადის ხარისხოვან ფუნქციებს, ე.ი. მოიცემიან შემდეგი სახით: $const. \times x_3^{\kappa}$, სადაც $\kappa = cosnt. \in (0,1)$. განტოლებები დაყვანილ იქნა მეორე გვარის წრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე. ჰილბერტ-შმიდტის თეორემების ([18][22][19]) გამოყენებით ამონახსნები ჩაიწერა მწკრივის სახით და შესწავლილ იქნა მიღებული მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის საკითხი; პარაგრაფში 4 წარმოდგენილია პარაგრაფ 2-ში განხილული ამოცანების ამონახსნების გრაფიკები. დამატებითი თეორემები, რომლებიც გამოყენებულია ნაშრომში წარმოდგენილია დანართში A; დანართში B წარმოდგენილია MATLAB-ის კოდები პარაგრაფ 4-ში განხილული ამოცანების ამოხსნებისთვის; დანართში C მოყვანილია დამატებითი შენიშვნები.

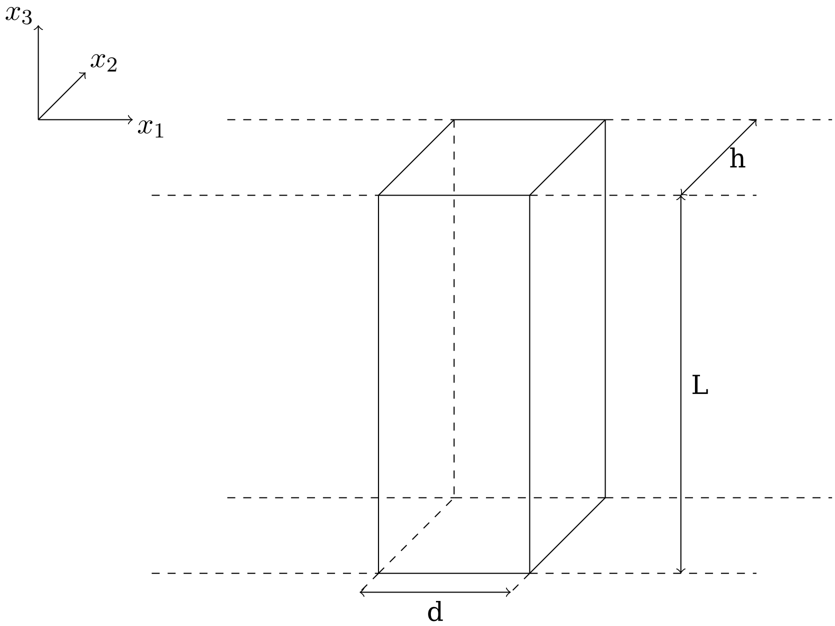
1 დამხმარე მასალები

1.1 დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

მოცემულ ნაშრომში განხილულია პიეზოელექტრული დრეკადი ღერო ([7][13]):

$$\bar{V} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_3 \le L, 0 \le x_1 \le d, 0 \le x_2 \le h\} \tag{1}$$

სადაც $L, h = const.$



სურ 1.1: $\bar{V}$ არით მოცემული ღერო

სურ. 1.1-ში ნაჩვენებია (1)-ით მოცემული არე, რომელიც უკავია სხეულს. ფიზიკური თვალსაზრისით, სხეული წარმოადგენს x_1 ღერძის გასწვრივ ჩალაგებულ უსასრულო რაოდენობის მართკუთხა პარალელებიპედებს h სიმაღლით, L სიგრძითა და d სიგანით. ნაშრომში განხილულია შეზღუდვა, როდესაც სხეული დეფორმირდება მხოლოდ x_3 ღერძის გასწვრივ და ყველა ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ x_3 სივრცით ცვლადსა და t დროზე.

მმართველ განტოლებებს პიეზოელექტრული კელვინ-ფოიგტის მასალებისთვის სიცარიელეებით აქვთ შემდეგი სახე (იხ. მაგალითად [13]):

მოძრაობის განტოლებები

$$\begin{aligned} X_{ji,j} + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t), (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ t > t_0; i, j = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{2}$$

$$D_{j,j} = f_e, \qquad B_{j,j} = 0, \qquad \Omega \times]0, T[, \qquad j = \overline{1,3} \tag{3}$$

სადაც $X_{ij} \in C^1(\Omega)$ წარმოადგენს ძაბვის ტენზორს; Φ_i წარმოადგენენ მოცულობითი ძალების მდგენელებს, ρ - მასის სიმკვრივეს, $u_i \in C^2(\Omega)$ - გაადადგილებებს; $f_e : \Omega\times]0, T[\to \mathbb{R}^1$ წარმოადგენს ელექტრული მუხტის სიმკვრივეს, $\mathbf{D} := (D_1, D_2, D_3) : \Omega\times]0, T[\to \mathbb{R}^3$ ელექტრული

გადაადგილების ვექტორს, $\mathbf{B} := (B_1, B_2, B_3) : \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}^3$ - მაგნიტური ინდუქციის ვექტორს. აქ და შემდგომში გამოყენებული იქნება აინშტაინის აჯამვის წესი.

კინემატიკური დამოკიდებულებები

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad i, j = \overline{1,3} \tag{4}$$

სადაც $e_{ij} \in C^1(\Omega)$ წარმოადგენს დეფორმაციის ტენზორს.

კონსტიტუციური განტოლებები

$$X_{ji} = X_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} + p_{kij}\chi_{,k} + q_{kij}\eta_{,k}, \qquad i, j, k, l = \overline{1,3} \tag{5}$$

$$D_j = p_{jkl}e_{kl} - \varsigma_{jl}\chi_{,l} - \tilde{a}_{jl}\eta_{,l}, \qquad i, j, k, l = \overline{1,3} \tag{6}$$

$$B_j = q_{jkl}e_{kl} - \tilde{a}_{jl}\chi_{,l} - \xi_{jl}\eta_{,l}, \qquad i, j, k, l = \overline{1,3} \tag{7}$$

სადაც E_{ijkl} წარმოადგენენ დრეკად მუდმივებს (გაზომილს მუდმივი ელექტრული და მაგნიტური ველის პირობებში), $\chi : \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}^1$ და $\eta : \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}^1$ შესაბამისად ელექტრული და მაგნიტური ველის პოტენციალს; p_{kij} - პიეზოელექტრულ კოეფიციენტებს (გაზომილს მუდმივი მაგნიტური ველის პირობებში), და q_{kij} - პიეზომაგნიტურ კოეფიციენტებს (გაზომილს მუდმივი ელექტრული ველის პირობებში); ς_{jl} და ξ_{jl} წარმოადგენენ შესაბამისად დიელექტრულ შეღწევადობასა (გაზომილს მუდმივი ძაბვისა და მაგნიტური ველის პირობებში) და მაგნიტურ შეღწევადობას (გაზომილს მუდმივი ძაბვისა და ელექტრული ველის პირობებში); $\tilde{a}_{jl}$ წარმოადგენს წყვილკოეფიციენტებს (ე.წ. მაგნიტოელექტრულ მუდმივებს), რომელიც აკავშირებს ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს (გაზომილს მუდმივი ძაბვის პირობებში) ([13][38]). შესაძლებელია ჩვენება, რომ კონსტიტუციურ კოეფიციენტებს $E_{ijkl}, p_{kij}, q_{kij}, \varsigma_{jl}, \tilde{a}_{jl}, \xi_{jl}$ ახასიათებს შემდეგი სიმეტრია ([37]):

$$\begin{gathered} E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{jilk} = E_{klij}, \xi_{jl} = \xi_{lj}, \tilde{a}_{jl} = \tilde{a}_{lj} \\ p_{kij} = p_{kji}, q_{kij} = q_{kji}, \varsigma_{jl} = \varsigma_{lj} \\ i, j, k, l = \overline{1,3} \end{gathered} \tag{8}$$

ნაშრომში განხილულია შემთხვევა, როდესაც სხეული დეფორმირდება მხოლოდ x_3 ღერძის გასწვრივ, ე.ი. $u_1 = u_2 = 0$. უკანასკნელის გათვალისწინებით, თუ ჩავსვამთ (4) დამოკიდებულებებს (5)-(7) განტოლებებში და მიღებულს (2) და (3) განტოლებებში, (8) დამოკიდებულებების მხედველობაში მიღებით მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$(E_{\alpha 333}u_{3,3} + p_{3\alpha 3}\chi_{,3} + q_{3\alpha 3}\eta_{,3})_{,3} + \Phi_\alpha = 0, \alpha = 1, 2 \tag{9}$$

$$(E_{3333}u_{3,3} + p_{333}\chi_{,3} + q_{333}\eta_{,3})_{,3} + \Phi_3 = \rho\ddot{u}_3, \tag{10}$$

$$(p_{333}u_{3,3} - \varsigma_{33}\chi_{,3} - \tilde{a}_{33}\eta_{,3})_{,3} = f_e \tag{11}$$

$$(q_{333}u_{3,3} - \tilde{a}_{33}\chi_{,3} - \xi_{33}\eta_{,3})_{,3} = 0 \tag{12}$$

აღნიშნულ განტოლებებში Φ_3, ρ და f_e ცნობილი ფუნქციებია, ხოლო u_3, χ და η წარმოად-

გენენ საძიებელ ფუნქციებს. განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ძირითად იდეას წარმოადგენს (x_3, χ, η) საძიებელი ფუნქციების პოვნა (10)-(12) სისტემიდან. (9) განტოლებებით კი ედებათ პირობა მოცულობითი ძალების Φ_1 და Φ_2 მდგენელებს. ფიზიკური თვალსაზრისით აღნიშნული პირობების ინტერპრეტაცია არის შემდეგნაირი: როგორი მოცულობითი ძალებით უნდა ვიმოქმედოთ სხეულზე x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ იმისთვის, რომ სხეული დეფორმირდეს მხოლოდ x_3 ღერძის გასწვრივ.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ (9) და (10) განტოლებები მიიღება (2) მოძრაობის განტოლებებიდან, ხოლო (11) და (12) განტოლებები - (3)-დან.

2 კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როდესაც: $E_{i333}, p_{333}, q_{333}, \varsigma_{33}, \tilde{a}_{33}, \xi_{33} = cosnt., i = \overline{1,3}$. უკანასკნელის გათვალისწინებით (9)-(12) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$E_{\alpha 333} u_{3,33} + p_{3\alpha 3} \chi_{,33} + q_{3\alpha 3} \eta_{,33} + \Phi_\alpha = 0, \alpha = 1,2; k = \overline{1,3} \tag{13}$$

$$E_{3333} u_{3,33} + p_{333} \chi_{,33} + q_{333} \eta_{,33} + \Phi_3 = \rho \ddot{u}_3, \tag{14}$$

$$p_{333} u_{3,33} - \varsigma_{33} \chi_{,33} - \tilde{a}_{33} \eta_{,33} = f_e \tag{15}$$

$$q_{333} u_{3,33} - \tilde{a}_{33} \chi_{,33} - \xi_{33} \eta_{,33} = 0 \tag{16}$$

თუ (14)-(16) განტოლებათა სისტემას შევხედავთ, როგორც ალგებრულ სისტემას ($u_{3,33}$, $\chi_{,33}$,$\eta_{,33}$)-ის მიმართ, მაშინ ცხადია, რომ ამონასნის არსებობისთსვის აუცილებელია მოვითხოვოთ შემდეგი დეტერმინანტის ნულისგან განსხვავებულობა:

$$D \equiv \begin{vmatrix} E_{3333} & p_{333} & q_{333} \\ p_{333} & -\varsigma_{33} & -\tilde{a}_{33} \\ q_{333} & -\tilde{a}_{33} & -\xi_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{17}$$

2.1 სტატიკის ამოცანა

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ყველა ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ x_3 სივრცით ცვლადზე და არ არის დამოკიდებული დროზე, მაშინ (14) განტოლების მარჯვენა მხარე განულდება და მივიღებთ:

$$E_{3333} u_{3,33} + p_{333} \chi_{,33} + q_{333} \eta_{,33} + \Phi_3 = 0 \tag{18}$$

(13), (15) და (16) განტოლებები არ შეიცვლიან სახეს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $u_3(x_3) \in C^2([0, L])$ და განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{gathered} u_3(0) = a_0, \chi(0) = b_0, \eta(0) = d_0, \\ u_3(L) = a_1, \chi(L) = b_1, \eta(L) = d_1 \end{gathered} \tag{19}$$

თუ (15) განტოლებას გავამრავლებთ ξ_{33}-ზე, (16)-ს $\tilde{a}_{33}$-ზე და პირველ შედეგს გამოვაკლებთ მეორეს, მაშინ მივიღებთ გამოსახულებას $\chi_{,33}$-სთვის, რომელიც დამოკიდებული იქნება $u_{3,33}$-ზე:

$$\chi_{,33} = \frac{\xi_{33}p_{333} - \tilde{a}_{33}q_{333}}{\xi_{33}\varsigma_{33} - \tilde{a}_{33}^2} u_{3,33} - \frac{\xi_{33}}{\xi_{33}\varsigma_{33} - \tilde{a}_{33}^2} f_e \tag{20}$$

ანალოგიურად, (15) და (16) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$\eta_{,33} = \frac{\tilde{a}_{33}p_{333} - \varsigma_{33}q_{333}}{\tilde{a}_{33}^2 - \xi_{33}\varsigma_{33}} u_{3,33} - \frac{\tilde{a}_{33}}{\tilde{a}_{33}^2 - \xi_{33}\varsigma_{33}} f_e \tag{21}$$

(18)-ის გათვალისწინებით, (20)-(21) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$L_1 u_{3,33} - L_2 f_e + \Phi_3 = 0 \tag{22}$$

სადაც

$$L_1 = E_{3333} + \frac{\xi_{33}p_{333}^2 - 2\tilde{a}_{33}p_{333}q_{333} + \varsigma_{33}q_{333}^2}{\xi_{33}\varsigma_{33} - \tilde{a}_{33}^2}$$

$$L_2 = \frac{\xi_{33}p_{333} - \tilde{a}_{33}q_{333}}{\xi_{33}\varsigma_{33} - \tilde{a}_{33}^2}$$

(22)-ის ორჯერ ინტეგრებით 0-დან x_3-მდე მივიღებთ ზოგად ამონახსნს u_3-სთვის:

$$u_3(x_3) = -\frac{1}{L_1}\int_0^{x_3} (x_3 - y)\left(\Phi_3(y) - L_2 f_e(y)\right) dy + c_1 x_3 + c_2 \tag{23}$$

(19) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{gathered} c_1 = \frac{1}{L}\left[L_1(a_1 - a_0) - \int_0^{L} (L - y)\left(L_2 f_e(y) - \Phi_3(y)\right)\right], \\ c_2 = L_1 a_0 \end{gathered} \tag{24}$$

მაშინ, (23) და (24)-დან მივიღებთ:

$$u_3(x_3) = L_1 a_0 + \frac{x_3}{L}(a_1 - a_0) + \frac{1}{L_1}\int_0^{L} K(x_3, y)\left(\Phi_3(y) - L_2 f_e(y)\right) dy \tag{25}$$

სადაც

$$K(x_3, y) = K(y, x_3) = \begin{cases} y\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) & 0 \le y \le x_3 \\ x_3\left(1 - \frac{y}{L}\right) & x_3 \le y \le L \end{cases} \tag{26}$$

ანალოგიურად, (20) და (21) განტოლებების ორჯერ ინტეგრებით 0-დან x_3-მდე მივიღებთ:

$$\chi(x_3) = L_{23}u_3 - L_3\int_0^{x_3} (x_3 - y) f_e(y) dy + c_3 x_3 + c_4 \tag{27}$$

$$\eta(x_3) = L_4 u_3 - L_5\int_0^{x_3} (x_3 - y) f_e(y) dy + c_5 x_3 + c_6 \tag{28}$$

სადაც

$$L_{2i} = \frac{p_{3i3}\xi_{33} - q_{3i3}\tilde{a}_{33}}{\xi_{33}\varsigma_{33} - (\tilde{a}_{33})^2}, \qquad i = \overline{1,3} \tag{29}$$

$$L_3 = \frac{\xi_{33}}{\xi_{33}\varsigma_{33} - (\tilde{a}_{33})^2} \tag{30}$$

$$L_4 = \frac{p_{333}\tilde{a}_{33} - \varsigma_{33}q_{333}}{(\tilde{a}_{33})^2 - \varsigma_{33}\xi_{33}} \tag{31}$$

$$L_5 = \frac{\tilde{a}_{33}}{(\tilde{a}_{33})^2 - \varsigma_{33}\xi_{33}} \tag{32}$$

(19) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{gathered} c_3 = \frac{1}{L}\left(b_1 - b_0 + L_{23}(a_0 - a_1)\int_0^L (L-y)f_e(y)dy\right) \\ c_4 = b_0 - L_{23}a_0 \\ c_5 = \frac{1}{L}\left(d_1 - d_0 + L_4(a_0 - a_1)\int_0^L (L-y)f_e(y)dy\right) \\ c_6 = d_0 - L_4 a_0 \end{gathered} \tag{33}$$

მაშინ (27), (28) და (33)-დან მივიღებთ საბოლოო გამოსახულებებს χ და η-სთვის:

$$\chi(x_3) = L_{23}u_3(x_3) + \frac{x_3}{L}(b_1 - b_0 + L_{23}(a_0 - a_1)) + L_3\int_0^L K(x_3, y)f_e(y)dy + b_0 - L_{23}a_0$$

$$\eta(x_3) = L_4 u_3(x_3) + \frac{x_3}{L}(d_1 - d_0 + L_4(a_0 - a_1)) + L_5\int_0^L K(x_3, y)f_e(y)dy + d_0 - L_4 a_0$$

ბოლოს, (13) და (22) განტოლებებიდან მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს Φ_1 და Φ_2-სთვის:

$$\Phi_\alpha(x_3) = \left(L_{2\alpha} - \frac{L_{1\alpha}}{L_{13}}L_{23}\right)f_e(x_3) + \frac{L_{1\alpha}}{L_{13}}\Phi_3(x_3), \qquad \alpha = 1, 2$$

სადაც

$$L_{1i} = E_{i333} + \frac{p_{3i3}(\xi_{33}p_{333} - \tilde{a}_{33}q_{333})}{\xi_{33}\varsigma_{33} - (\tilde{a}_{33})^2} + \frac{q_{3i3}(\tilde{a}_{33}p_{333} - \varsigma_{33}q_{333})}{(\tilde{a}_{33})^2 - \varsigma_{33}\xi_{33}}, \quad i = \overline{1,3} \tag{34}$$

აღვნიშნოთ, რომ $L_{13} = L_1$ და $L_{23} = L_2$.

2.2 დინამიკის ამოცანა

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს და განტოლებებში შემავალი ყველა ფუნქცია დამოკიდებულია როგორც x_3 სივრცით ცვლადზე, ასევე t დროზე. თუ (14)-(16) განტოლებათა სისტემის ამოხსნას დავიწყებთ იმავე გზით, რომელიც განხილული იყო პარაგრაფში 2.1, დავალთ (22)-ის მსგავს განტოლებაზე არანულოვანი მარჯვენა მხრით:

$$L_1 u_{3,33}(x_3, t) - L_2 f_e(x_3, t) + \Phi_3(x_3, t) = \rho\ddot{u}_3(x_3, t) \tag{35}$$

საძიებელი ფუნქციები ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$u_3(x_3,t)=u_3^0(x_3)e^{-i\omega t}, f_e(x_3,t)=f_e^0(x_3)e^{-i\omega t}, \Phi_3(x_3,t)=\Phi_3^0(x_3)e^{-i\omega t}$$
$$\eta=\eta^0(x_3)e^{-i\omega t}, \quad \chi=\chi^0(x_3)e^{-i\omega t} \tag{36}$$

სადაც $u_3^0(x_3)\in C^2([0,L])$ და განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$u_3(0,t)=a^*e^{-i\omega t}, \chi(0,t)=a_0e^{-i\omega t}, \eta(0,t)=b_0e^{-i\omega t}$$
$$u_3(L,t)=b^*e^{-i\omega t}, \chi(L,t)=a_Le^{-i\omega t}, \eta(L,t)=b_Le^{-i\omega t} \tag{37}$$

(35) და (36) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$L_1u_{3,33}^0(x_3)+\rho\omega^2u_3^0(x_3)=L_2f_e^0(x_3)-\Phi_3^0(x_3) \tag{38}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$g(x_3)\equiv\frac{L_2f_e^0(x_3)}{L_1}-\frac{\Phi_3^0(x_3)}{L_1}$$

და

$$\omega_0^2\equiv\frac{\rho\omega^2}{|L_1|}$$

მაშინ (38) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$u_{3,33}^0(x_3)+sign(L_1)\frac{\rho\omega^2}{|L_1|}u_3^0(x_3)=g(x_3) \tag{39}$$

სადაც

$$sign(L_1)=\begin{cases}1 & L_1>0\\ -1 & L_1<0\end{cases}$$

(39) განტოლებას ვხსნით მუდმივის ვარიაციის მეთოდით ([39]).

შემთხვევა 1: $L_1>0$

როდესაც $L_1>0$ შესაძლებელია ჩვენება, რომ (39) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u_3^0(x_3)=c_1e^{-i\omega_0x_3}+c_2e^{i\omega_0x_3}-e^{-i\omega_0x_3}\int_0^{x_3}\frac{e^{i\omega_0\xi}g(\xi)}{W(e^{-i\omega_0\xi},e^{i\omega_0\xi})(\xi)}d\xi$$
$$+e^{i\omega_0x_3}\int_0^{x_3}\frac{e^{-i\omega_0\xi}g(\xi)}{W(e^{-i\omega_0\xi},e^{i\omega_0\xi})(\xi)}d\xi \tag{40}$$

სადაც $c_1e^{-i\omega_0x_3}+c_2e^{i\omega_0x_3}$ წარმოადგენს (39)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნებს, ხოლო $W(e^{-i\omega_0x_3},e^{i\omega_0x_3})$ წარმოადგენს $e^{-i\omega_0x_3}$ და $e^{i\omega_0x_3}$-ის ვრონსკის დეტერმინანტს:

$$W(e^{-i\omega_0x_3},e^{i\omega_0x_3})=2i\omega_0e^{i\omega_0x_3}e^{-i\omega_0x_3}$$

(40)-დან (37) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს c_1

და c_2-სთვის:

$$c_1 = \frac{1}{2isin(\omega_0 L)}\left(a^* e^{i\omega_0 L} - b^* + \frac{1}{\omega_0}\int_0^L g(\xi)sin(\omega_0(L-\xi))d\xi\right)$$
$$c_2 = \frac{-1}{2isin(\omega_0 L)}\left(a^* e^{-i\omega_0 L} - b^* + \frac{1}{\omega_0}\int_0^L g(\xi)sin(\omega_0(L-\xi))d\xi\right)$$

აღნიშნულის (40) განტოლებაში ჩასმისა და $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ დამოკიდებულიების გათვა-ლისწინების შემდეგ მივიღებთ:

$$u_3^0(x_3) = Acos(\omega_0 x_3) + Bsin(\omega_0 x_3) + \frac{1}{\omega_0}\int_0^{x_3} g(\xi)sin\left(\omega_0(x_3-\xi)\right)d\xi \tag{41}$$

სადაც

$$A = a^*$$

და

$$B = -a^* ctg(\omega_0 L) + \frac{b^*}{sin(\omega_0 L)} - \frac{1}{\omega_0 sin(\omega_0 L)}\int_0^L g(\xi)sin\left(\omega_0(L-\xi)\right)d\xi$$

იმისათვის, რომ (41) გამოსახულება გავამარტივოთ, შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

მაშინ (41) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} u_3^0(x_3) = R&\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}cos(\omega_0 x_3) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}sin(\omega_0 x_3)\right) \\ &+\frac{1}{\omega_0}\int_0^{x_3} g(\xi)sin\left(\omega_0(x_3-\xi)\right)d\xi \end{aligned} \tag{42}$$

თუ დამატებით შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = cos(\varphi)$$

მივიღებთ საბოლოო გამოსახულებას $u_3^0(x_3)$-სთვის:

$$u_3^0(x_3) = Rcos(\omega_0 x_3 - \varphi) + \frac{1}{\omega_0}\int_0^{x_3} g(\xi)sin\left(\omega_0(x_3-\xi)\right)d\xi \tag{43}$$

Case 2: $L_1 < 0$

ანალოგიურად, თუ $L_1 < 0$, მაშინ $u_3^0(x_3)$ ჩაიწერება ზოგადი სახით:

$$\begin{aligned} u_3^0(x_3) = c_1 e^{-\omega_0 x_3} + c_2 e^{\omega_0 x_3} &- e^{-\omega_0 x_3}\int_0^{x_3}\frac{e^{\omega_0\xi}g(\xi)}{W(e^{-\omega_0\xi}, e^{\omega_0\xi})(\xi)}d\xi \\ &+e^{\omega_0 x_3}\int_0^{x_3}\frac{e^{-\omega_0\xi}g(\xi)}{W(e^{-\omega_0\xi}, e^{\omega_0\xi})(\xi)}d\xi \end{aligned} \tag{44}$$

სადაც $c_1 e^{-\omega_0 x_3} + c_2 e^{\omega_0 x_3}$ წარმოადგენს (39)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური

განტოლების ზოგად ამონახნსებს, ხოლო $W(e^{-\omega_0 x_3}, e^{\omega_0 x_3})$ წარმოადგენს $e^{-\omega_0 x_3}$ და $e^{\omega_0 x_3}$-ის ვრონსკის დეტერმინანტს:

$$W(e^{-\omega_0 x_3}, e^{\omega_0 x_3}) = 2\omega_0 e^{-\omega_0 x_3} e^{\omega_0 x_3}$$

(37) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$c_1 = \frac{1}{e^{\omega_0 L} - e^{-\omega_0 L}} \left(a^* e^{\omega_0 L} - b^* + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^L g(\xi)(e^{\omega_0(L-\xi)} - e^{-\omega_0(L-\xi)}) d\xi \right)$$
$$c_2 = \frac{-1}{e^{\omega_0 L} - e^{-\omega_0 L}} \left(a^* e^{-\omega_0 L} - b^* + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^L g(\xi)(e^{\omega_0(L-\xi)} - e^{-\omega_0(L-\xi)}) d\xi \right)$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით $u_3^0(x_3)$-სთვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$u_3^0(x_3) = Ae^{-\omega_0 x_3} + Be^{\omega_0 x_3} + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{x_3} g(\xi)(e^{\omega_0(x_3-\xi)} - e^{-\omega_0(x_3-\xi)}) d\xi \tag{45}$$

სადაც

$$A = \frac{1}{e^{\omega_0 L} - e^{-\omega_0 L}} \left(a^* e^{\omega_0 L} - b^* + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^L g(\xi)(e^{\omega_0(L-\xi)} - e^{-\omega_0(L-\xi)}) d\xi \right)$$

და

$$B = \frac{1}{e^{-\omega_0 L} - e^{\omega_0 L}} \left(a^* e^{-\omega_0 L} - b^* + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^L g(\xi)(e^{\omega_0(L-\xi)} - e^{-\omega_0(L-\xi)}) d\xi \right)$$

ზემოთაღნიშნულ ორ შემთხვევაში მიღებული შედეგები ჩავწეროთ ერთი გამოსახულების სახით:

$$u_3^0(x_3) = \begin{cases} Rcos(\omega_0 x_3 - \phi) + \frac{1}{\omega_0} \int_0^{x_3} g(\xi) sin\left(\omega_0(x_3 - \xi)\right) d\xi & L_1 > 0 \\ Ae^{-\omega_0 x_3} + Be^{\omega_0 x_3} + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{x_3} g(\xi)(e^{\omega_0(x_3-\xi)} - e^{-\omega_0(x_3-\xi)}) d\xi & L_1 < 0 \end{cases} \tag{46}$$

ადვილია იმის ჩვენება, რომ (46) აკმაყოფილებს (39) განტოლებასა და (37) სასაზღვრო პირობებს.

საბოლოო გამოსახულება $u_3(x_3, t)$-სთვის ადვილად მიიღება (46) და (36)-ის გათვალისწინებით.

(15) და (16) განტოლებებიდან მიიღება იგივე გამოსახულებები $\eta^0_{,33}$ და $\chi^0_{,33}$-სთვის როგორიც მოცემული იყო $\eta_{,33}$ და $\chi_{,33}$-თვის (20) და (21) გამოსახულებებით. შედეგად, თუ მიღებული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნას ზუსტად მივყვებით იმავე გზით, (37) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი გამოსახულებები $\eta^0(x_3)$ და $\chi^0(x_3)$-სთვის:

$$\eta^0(x_3) = L_4 u_3 + k_1 x_3 + k_2 + L_5 \int_0^L K(x_3, y) f_e(y) dy$$
$$\chi^0(x_3) = L_{23} u_3 + k_3 x_3 + k_4 + L_3 \int_0^L K(x_3, y) f_e(y) dy$$

სადაც $K(x_3, y)$ მოიცემა (26)-ით, მუდმივები L_{23}, L_3, L_4, L_5 (29)-(32) აღნიშვნებით და

$$k_1 = \frac{1}{L}[L_4(a^* - b^*) + b_L - b_0]$$
$$k_2 = b_0 - L_4 a^*$$
$$k_3 = \frac{1}{L}[L_{23}(a^* - b^*) + a_L - a_0]$$
$$k_4 = a_0 - L_3 a^*$$

საბოლოოდ, (13) განტოლებებიდან Φ_1 და Φ_2-სთვის მივიღებთ პირობებს, რომლებიც შეზღუდავენ სხეულის დეფორმაციას მხოლოდ x_3 ღერძის გასწვრივ:

$$\Phi_\alpha(x_3) = -L_{1\alpha} u_{3,33}(x_3) + L_{2\alpha} f_e(x_3), \quad \alpha = 1, 2$$

სადაც $L_{1\alpha}$ მოიცემა (34) აღნიშვნით.

3 კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ x_3 სივრცითი ცვლადის ხარისხოვან ფუნქციებს

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია შემთხვევა, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ x_3 სივრცითი ცვლადის ხარისხოვან ფუნქციებს:

$$\begin{aligned} E_{i333} = E^0_{i333} x_3^\kappa, p_{3i3} = p^0_{3i3} x_3^\kappa, q_{3i3} = q^0_{3i3} x_3^\kappa, \varsigma_{33} = \varsigma^0_{33} x_3^\kappa, \\ \xi_{33} = \xi^0_{33} x_3^\kappa, \tilde{a}_{33} = \tilde{a}^0_{33} x_3^\kappa, \qquad i = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{47}$$

სადაც $E^0_{i333}, p^0_{3i3}, q^0_{3i3}, \varsigma^0_{33}, \xi^0_{33}, \tilde{a}^0_{33}, \kappa = const, i = \overline{1,3}$ და $\kappa > 0$.

(47)-ის გათვალისწინებით (10)-(12) განტოლებათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$(E^0_{3333} x_3^\kappa u_{3,3} + p^0_{333} x_3^\kappa \chi_{,3} + q^0_{3333} x_3^\kappa \eta_{,3})_{,3} + \Phi_3 = \rho \ddot{u}_3 \tag{48}$$

$$(p^0_{333} x_3^\kappa u_{3,3} - \varsigma^0_{33} x_3^\kappa \chi_{,3} - \tilde{a}^0_{33} x_3^\kappa \eta_{,3})_{,3} = f_e \tag{49}$$

$$(q^0_{3333} x_3^\kappa u_{3,3} - \tilde{a}^0_{33} x_3^\kappa \chi_{,3} - \xi^0_{33} x_3^\kappa \eta_{,3})_{,3} = 0 \tag{50}$$

თუ (48)-(50) განტოლებათა სისტემას შევხედავთ, როგორც ალგებრულ სისტემას $(x_3^\kappa u_{3,3})_{,3}$, $(x_3^\kappa \chi_{,3})_{,3}$ და $(x_3^\kappa \eta_{,3})_{,3}$-ის მიმართ, მაშინ ცხადია, რომ ამონახსნის არსებობისთვის აუცილებელია მოვითხოვოთ შემდეგი დეტერმინანტის ნულისგან განსხვავებულობა:

$$D \equiv \begin{vmatrix} E^0_{3333} & p^0_{333} & q^0_{333} \\ p^0_{333} & -\varsigma^0_{33} & -\tilde{a}^0_{33} \\ q^0_{333} & -\tilde{a}^0_{33} & -\xi^0_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{51}$$

მოგვიანებით ვაჩვენებთ (იხ. ლემა 3.4), რომ დასმული ამოცანის ამონახსნი არის რხევადი

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობა:

$$D > 0 \tag{52}$$

3.1 (48)-(50) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობები:

$$u_3(\cdot, t) \in C^2(]0, L[) \cap C([0, L])$$

$$u_3(x_3, \cdot) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0), u_3(x_3, t) \in C(0 \leq x_3 \leq L, t \geq 0)$$

დამატებით ჩავთვალოთ, რომ $\kappa < 1$ და განვიხილოთ შემდეგი ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები:

$$u_3(0, t) = u_3(L, t) = \xi(0, t) = \xi(L, t) = \eta(0, t) = \eta(L, t) = 0 \tag{53}$$

და არაერთგვაროვანი საწყისი პირობები:

$$u_3(x_3, 0) = \varphi_1(x_3) \tag{54}$$

$$\dot{u}_3(x_3, 0) = \varphi_2(x_3) \tag{55}$$

(48) განტოლების ინტეგრებით L-დან x_3-მდე, მიღებული განტოლების ორივე მხრის გაყოფით x_3^{κ}-ზე და მიღებული შედეგის ხელმეორედ ინტეგრებით L-დან x_3-მდე მივიღებთ:

$$\begin{aligned} E_{3333}^0 u_3 + p_{333}^0 \chi + q_{333}^0 \eta - \frac{\rho}{1-\kappa} \int_L^{x_3} (x_3^{1-\kappa} - y^{1-\kappa}) \ddot{u}_3(y, t) dy \\ = -\frac{1}{1-\kappa} \int_L^{x_3} (x_3^{1-\kappa} - y^{1-\kappa}) \Phi_3(y) dy + \frac{c_{11}}{1-\kappa} (x_3^{1-\kappa} - L^{1-\kappa}) + c_{12} \end{aligned} \tag{56}$$

(53) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{gathered} c_{11} = \frac{1}{L^{1-\kappa}} \left[\rho \int_0^L y^{1-\kappa} \ddot{u}_3(y, t) dy - \int_0^L y^{1-\kappa} \Phi_3(y) dy \right] \\ c_{12} = 0 \end{gathered} \tag{57}$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned} E_{3333}^0 u_3(x_3, t) + p_{333}^0 \chi(x_3, t) + q_{333}^0 \eta(x_3, t) - \frac{\rho}{1-\kappa} \int_L^{x_3} (x_3^{1-\kappa} - y^{1-\kappa}) \ddot{u}_3(y, t) dy \\ = -\frac{1}{1-\kappa} \int_L^{x_3} (x_3^{1-\kappa} - y^{1-\kappa}) \Phi_3(y, t) dy \\ + \frac{x_3^{1-\kappa} - L^{1-\kappa}}{(1-\kappa) L^{1-\kappa}} \left(\rho \int_0^L y^{1-\kappa} \ddot{u}_3(y, t) dy - \int_0^L y^{1-\kappa} \Phi_3(y, t) dy \right) \end{aligned} \tag{58}$$

მსგავსად, (49) და (50) გაანტოლებებიდან მივიღებთ ზოგად ამონახსნებს χ და η-სთვის, რო-

გორც u_3-ის ფუნქციებს:

$$\chi(x_3,t)=\frac{\xi_{33}^0 p_{333}^0-\tilde{a}_{33}^0 q_{333}^0}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2}u_3(x_3,t)-\frac{1}{1-\kappa}\frac{\xi_{33}^0}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2}\int_L^{x_3}(x_3^{1-\kappa}-y^{1-\kappa})f_e(y)dy$$
$$-\frac{1}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2}\frac{c_{21}}{1-\kappa}(x_3^{1-\kappa}-L^{1-\kappa})-\frac{c_{22}}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2} \quad (59)$$

$$\eta(x_3,t)=\frac{\tilde{a}_{33}^0 p_{333}^0-\varsigma_{33}^0 q_{333}^0}{(\tilde{a}_{33}^0)^2-\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0}u_3(x_3,t)-\frac{1}{1-\kappa}\frac{\tilde{a}_{33}^0}{(\tilde{a}_{33}^0)^2-\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0}\int_L^{x_3}(x_3^{1-\kappa}-y^{1-\kappa})f_e(y)dy$$
$$-\frac{1}{(\tilde{a}_{33}^0)^2-\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0}\frac{c_{31}}{1-\kappa}(x_3^{1-\kappa}-L^{1-\kappa})-\frac{c_{32}}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2} \quad (60)$$

(53) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, (59) და (60)-დან მივიღებთ:

$$\begin{gathered}
c_{21}=\frac{\xi_{33}^0}{L^{1-\kappa}}\int_0^L y^{1-\kappa}f_e(y)dy\\
c_{22}=0\\
c_{31}=\frac{\tilde{a}_{33}^0}{L^{1-\kappa}}\int_0^L y^{1-\kappa}f_e(y)dy\\
c_{32}=0
\end{gathered} \quad (61)$$

საბოლოოდ, (61)-ს გათვალისწინებით:

$$\begin{gathered}
\chi(x_3,t)=\frac{1}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2}\times\\
\Bigg[(\xi_{33}^0 p_{333}^0-\tilde{a}_{33}^0 q_{333}^0)u_3(x_3,t)-\frac{\xi_{33}^0}{1-\kappa}\int_L^{x_3}(x_3^{1-\kappa}-y^{1-\kappa})f_e(y,t)dy\\
-\frac{\xi_{33}^0(x_3^{1-\kappa}-L^{1-\kappa})}{(1-\kappa)L^{1-\kappa}}\int_0^L y^{1-\kappa}f_e(y,t)dy\Bigg]
\end{gathered} \quad (62)$$

$$\begin{gathered}
\eta(x_3,t)=\frac{-1}{\xi_{33}^0\varsigma_{33}^0-(\tilde{a}_{33}^0)^2}\times\\
\Bigg[(\tilde{a}_{33}^0 p_{333}^0-\varsigma_{33}^0 q_{333}^0)u_3(x_3,t)-\frac{\tilde{a}_{33}^0}{1-\kappa}\int_L^{x_3}(x_3^{1-\kappa}-y^{1-\kappa})f_e(y,t)dy\\
-\frac{\tilde{a}_{33}^0(x_3^{1-\kappa}-L^{1-\kappa})}{(1-\kappa)L^{1-\kappa}}\int_0^L y^{1-\kappa}f_e(y,t)dy\Bigg]
\end{gathered} \quad (63)$$

(62) და (63)-ის ჩასმით (58) განტოლებაში, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ u_3-სთვის მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$u_3(x_3,t)+\rho\int_0^L K(x_3,y)\ddot{u}_3(y,t)dy=-L_2\int_0^L K(x_3,y)f_e(y,t)dy$$
$$+\int_0^L K(x_3,y)\Phi_3(y,t)dy \quad (64)$$

სადაც

$$K(x_3,y)=\frac{1}{(1-\kappa)L_1L^{1-\kappa}}\times\begin{cases}y^{1-\kappa}(L^{1-\kappa}-x_3^{1-\kappa}) & 0\le y\le x_3\\ x_3^{1-\kappa}(L^{1-\kappa}-y^{1-\kappa}) & x_3\le y\le L\end{cases}\tag{65}$$

$$L_1=E^0_{3333}+\frac{(p^0_{333})^2\xi^0_{33}-2p^0_{333}q^0_{333}\tilde{a}^0_{33}+(q^0_{333})^2\varsigma^0_{33}}{\xi^0_{33}\varsigma^0_{33}-(\tilde{a}^0_{33})^2}\tag{66}$$

$$L_2=\frac{p^0_{333}\xi^0_{33}-q^0_{333}\tilde{a}^0_{33}}{\xi^0_{33}\varsigma^0_{33}-(\tilde{a}^0_{33})^2}\tag{67}$$

ქვემოთ მოყვანილი ლემის ძალით $K(x_3,y)$ არის სიმეტრიული.

ლემა 3.1. *(65)-ით განსაზღვრული $K(x_3,y)$ სიმეტრიულია, ე.ი.:*

$$K(x_3,y)=K(y,x_3)$$

დამტკიცება. დავუშვათ $z_1,z_2\in[0,L]$. მაშინ, პირდაპირი ჩასმით მივიღებთ:

$$K(z_1,z_2)=K(z_2,z_1)$$

□

დამატებით, თეორემა A.5-ის ძალით $K(x,t)$-ის უველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია.

(62) და (63)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\chi_{,3}(x_3,t)x_3^\kappa=&\frac{1}{\xi^0_{33}\varsigma^0_{33}-(\tilde{a}^0_{33})^2}\Big[(p^0_{333}\xi^0_{33}-q^0_{333}\tilde{a}^0_{33})u_{3,3}(x_3,t)x_3^\kappa\\&+\xi^0_{33}\int_{x_3}^L f_e(y,t)dy-\frac{\xi^0_{33}}{L^{1-\kappa}}\int_0^L y^{1-\kappa}f_e(y,t)dy\Big]\end{aligned}\tag{68}$$

$$\begin{aligned}\eta_{,3}(x_3,t)x_3^\kappa=&-\frac{1}{\xi^0_{33}\varsigma^0_{33}-(\tilde{a}^0_{33})^2}\Big[(\tilde{a}^0_{33}p^0_{333}-\varsigma^0_{33}q^0_{333})u_{3,3}(x_3,t)x_3^\kappa\\&+\tilde{a}^0_{33}\int_{x_3}^L f_e(y,t)dy-\frac{\tilde{a}^0_{33}}{L^{1-\kappa}}\int_0^L y^{1-\kappa}f_e(y,t)dy\Big]\end{aligned}\tag{69}$$

(68)-(69) გამოსახულებების ჩასმით (48)-ში მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$[L_1u_{3,3}x_3^\kappa]_{,3}-\rho\ddot{u}_3=F(x_3,t)\tag{70}$$

სადაც

$$F(x_3,t)\equiv L_2f_e(x_3,t)-\Phi_3(x_3,t)\tag{71}$$

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $f_e(x_3,t)\equiv 0$ და $\Phi_3(x_3,t)\equiv 0$ ნებისმიერი $x_3\in[0,L]$ და $t>0$-სთვის. მაშინ, $F(x_3,t)$ რომელიც განსაზღვრულია (71)-ით:

$$F(x_3,t)\equiv 0\tag{72}$$

$u_3(x_3,t)$ ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$u_3(x_3,t) = X(x_3)T(t) \tag{73}$$

(70), (72) და (73)-დან მივიღებთ:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{L_1(X_{,3}(x_3)x_3^{\kappa})_{,3}}{\rho X(x_3)} = -\lambda^2 = const. \tag{74}$$

(53) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით (73)-დან მივიღებთ:

$$X(0) = X(L) = 0 \tag{75}$$

ასევე, (64) განტოლებიდან (73) და (74)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda^2 = -\frac{X(x_3)}{\rho\int_0^L K(x_3,y)X(y)dy} \tag{76}$$

და

$$X(x_3) = \lambda^2\rho\int_0^L K(x_3,y)X(y)dy \tag{77}$$

დავამტკიცოთ შემდეგი ორი ლემა:

ლემა 3.2. *(77) განტოლების λ_n^2 საკუთრივ რიცხვთა რაოდენობა არ არის სასრული.*

დამტკიცება. საწინააღმდეგოს დაშვების ძალით დავუშვათ, რომ λ_n^2 საკუთრივი რიცხვების რაოდენობა სასრულია და $n = \overline{1,m}$. მაშინ $K(x_3,y)$ შესაძლებელია წარმოდგინდეს შემდეგი სახით (იხ. თეორემა A.2):

$$K(x_3,y) = \sum_{n=1}^{m}\frac{X_n(x_3)X_n(y)}{\lambda_n^2}$$

სადაც $X_n(x_3) \in C^2(]0,L[)$. მაშინ

$$K(x_3,y) \in C^2(]0,L[) \tag{78}$$

მაგრამ

$$K'(x_3,y)\big|_{y\to x-} - K'(x_3,y)\big|_{y\to x_3+} = -\frac{x_3^{-\kappa}}{L_1}$$

i.e. $K(x_3,y) \notin C^2(]0,L[)$, რაც ეწინააღმდეგება (78)-ს. $\square$

ლემა 3.3. *ამოცანის ამონახსნი რხევადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც L_1 განსაზღვრული (66)-ით დადებითია.*

დამტკიცება. (74)-დან:

$$X(x_3) = -\frac{L_1}{\lambda^2\rho}(X_{,3}(x_3)x_3^{\kappa})_{,3} \tag{79}$$

დავუშვათ (ზოგადობის დაურღვევლად, იხ. თეორემა A.4), რომ $X_n(x_3)$ წარმოადგენენ (79)-ის ორთონორმირებულ საკუთრივ რიცხვებს, მაშინ

$$\lambda_n^2 X_n(x_3) = -\frac{L_1}{\rho}(X_{n,3}(x_3)x_3^{\kappa})_{,3}$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $X_n(x_3)$-ზე და ვაინტეგრებთ 0-დან L-მდე, მივიღებთ:

$$\lambda_n^2 = -\frac{L_1}{\rho}\int_0^L X_n(x_3)(X_{n,3}(x_3)x_3^{\kappa})_{,3}dx_3 = \frac{L_1}{\rho}\int_0^L (X_{n,3}x_3^{\kappa/2})^2 dx_3$$

□

ახლა, ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა 3.4. *(48)-(50) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი რხევადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება (52) პირობა. (52) პირობა ექვივალენტურია შემდეგი პირობების: (a)* $L_1 > 0$*, (b)* $\lambda_n^2 > 0$*,* $n \in N$*.*

დამტკიცება. ლემა 3.3-ის თანახმად, როდესაც $L_1 > 0$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი რხევადია.

მეორე მხრივ, (51) და (66)-ის გათვალისწინებით:

$$D = \frac{L_1}{\xi_{33}^0 \varsigma_{33}^0 - (\tilde{a}_{33}^0)^2}$$

შესაძლებელია ჩვენება ([7][37]), რომ $\xi_{33}^0 \varsigma_{33}^0 - (\tilde{a}_{33}^0)^2 > 0$. აქედან ვასკვნით, რომ D-ს ნიშანი ემთხვევა L_1-ის ნიშანს. □

ლემა 3.4-ის გათვალისწინებით (76) განტოლების ამონახსნი $T_n(t)$ საკუთრივი ფუნქციებისთვის შესაბამისი λ_n^2 საკუთრივი რიცხვებით მოიცემა შემდეგი სახით:

$$T_n(t) = b_1^n sin(\lambda_n t) + b_2^n cos(\lambda_n t)$$

(73)-ის გათვალისწინებით უკანასკნელი ტოლობა გვაძლებს ფორმალურ გამოსახულებას $u_3(x_3, t)$-სთვის:

$$u_3(x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_3)\left(b_1^n sin(\lambda_n t) + b_2^n cos(\lambda_n t)\right) \tag{80}$$

(80) გამოსახულების ფორმალურად გაწარმოებით t დროის მიმართ ვღებულობთ:

$$\frac{du_3(x_3, t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n(x_3)\left(b_1^n cos(\lambda_n t) - b_2^n sin(\lambda_n t)\right) \tag{81}$$

(54)-(55) საწყისი პირობების გათვალისწინებით (80) და (81)-დან ფორმალურად ვღებულობთ:

$$\varphi_1(x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_3) b_2^n \tag{82}$$

$$\varphi_2(x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n(x_3) b_1^n \tag{83}$$

b_1^n და b_2^n-ისთვის გამოსახულების მისაღებად შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Psi_\alpha(x_3) \equiv \frac{L_1}{\rho}(\varphi_{\alpha,3}(x_3)x_3^\kappa)_{,3} \in C([0,L]), \alpha = 1,2 \tag{84}$$

(84)-ის ინტეგრებით L-დან x_3-მდე, მიღებული შედეგის ორივე მხრის გაყოფით x_3-ზე და შემდეგ ხელმეორედ ინტეგრებით L-დან x_3-მდე, (53) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\varphi_\alpha(x_3) = -\rho \int_0^L K(x_3,y)\Psi_\alpha(y)dy, \alpha = 1,2 \tag{85}$$

სადაც $K(x_3,y)$ განსაზღვრულია (65)-ით.

რადგან $\Psi_i(\xi) \in C([0,L])$, ხოლო $K(x_3,\xi) \in C([0,L] \times [0,L])$ სიმეტრიულია (იხ. ლემა 3.1), თეორემა A.1-ის ძალით $\varphi_\alpha(x_3)$ შესაძლებელია წარმოდგინდეს აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით $[0,L]$ ინტერვალზე:

$$\varphi_\alpha(x_3) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L \varphi_\alpha(y)X_n(y)dy\right)X_n(x_3), \qquad \alpha = 1,2 \tag{86}$$

ბოლოს, (86) განტოლებიდან, (82) და (83)-ს გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$b_1^n = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^L \varphi_2(y)X_n(y)dy \tag{87}$$

$$b_2^n = \int_0^L \varphi_1(y)X_n(y)dy \tag{88}$$

(80) და (81) ტოლობების მარჯვენა მხარეში არსებული მწკრივების, ასევე $x^\kappa u_{3,3}(x_3,t)$-ისა და $(x^\kappa u_{3,3}(x_3,t))_{,3}$-ის შესაბამისი მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობა (72) ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში განხილულია პარაგრაფში 3.2.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $f_e(x_3,t) \not\equiv 0$ და $\Phi_3 \not\equiv 0$. დამატებით, თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\varphi_i(x_3)$ საწყისი პირობები, რომლებიც მოიცემა (54)-(55) საწყისი პირობებით, იგივურად ნულის ტოლია $x_3 \in [0,L]$ ინტერვალზე.

დავუშვათ $F(x_3,t) \in L_2([0,L])$. მაშინ $F(x_3,t)$ შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F(x_3,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

სადაც ϕ_n წარმოქმნიან ორთოგონალურ ოჯახს $L_2([0,L])$-ში. მაშინ, თეორემა A.6-ის ძალით

$F(x_3,t)$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით:

$$\begin{aligned} F(x_3,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(F(x_3,t),X_n(x_3))X_n(x_3) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L F(x_3,t)X_n(x_3)dx_3\right)X_n(x_3) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)X_n(x_3) \end{aligned} \tag{89}$$

სადაც

$$F_n(t) = \int_0^L F(x_3,t)X_n(x_3)dx_3 \tag{90}$$

ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$u_3(x_3,t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_3,t) \tag{91}$$

სადაც $u_n(x_3,t)$ წარმოადგენს ამოცანის ამონახსნს, სადაც $F(x_3,t)$ შეცვლილია $X_n(x_3)F_n(t)$-თი. ამონახსნი ვეძებოთ ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით:

$$u_n(x_3,t) = X_n(x_3)T_{1n}(t) \tag{92}$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით (70) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{(L_1X_{n,3}(x_3)x_3^{\kappa})_{,3}}{X_n(x_3)} = \frac{\rho\ddot{T}_{1n}(t)+F_n(t)}{T_{1n}(t)} = -\lambda_n^2 \tag{93}$$

სადაც $X_n(x_3)$ აკმაყოფილებს (77) განტოლებას.

თუ (93) განტოლებას ამოვხსნით მუდმივის ვარიაციის მეთოდით $T_{in}(t)$-სთვის, მაშინ (91), (92) და საწყის-სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, T_{1n} ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$T_{1n} = \frac{\sqrt{\rho}}{\lambda_n}\int_0^t F_n(\tau)sin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{\rho}}(t-\tau)\right)d\tau \tag{94}$$

ამასთან, (92) და (94)-ის გათვალისწინებით $u_3(x_3,t)$-სთვის მივიღებთ შემდეგ მწკრივს:

$$u_3(x_3,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\rho}}{\lambda_n}X_n(x_3)\int_0^t\left[\int_0^L F(\xi,\tau)X_n(\xi)d\xi\right]sin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{\rho}}(t-\tau)\right)d\tau \tag{95}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $F(.,t)\in C([0,L])$ და $F(x_3,.)\in C(t>0)\cap C^1(t>0)\cap C^2(t>0)$, (95) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში არსებული მწკრივის, მისი დროით პირველი და მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამისი მწკრივებისა და $x^{\kappa}u_{3,3}(x_3,t)$ და $(x^{\kappa}u_{3,3}(x_3,t))_{,3}$-ს შესაბამისი მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის საკითხი შესწავლილია პარაგრაფში 3.2.2-ში.

ბოლოს, თუ $\varphi_i(x_3) \not\equiv 0$, მაშინ ამონახსნი შესაძლებელია წარმოვაადგინოთ შემდეგი სახით:

$$u_3(x_3,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_3,t)$$

სადაც

$$u_n(x_3,t) = X_n(x_3)(T_n + T_{1n})$$

$X_n(x_3)T_n$ მოიცემა (80), ხოლო $X_n(x_3)T_{1n}$ - (95) გამოსახულებებით.

3.2 ამონახსნის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობა

Remark 3.1. *სიმარტივისთვის, მოყვენილ თეორემებში უტოლობების მარცხენა მხარეს მოცემული ფუნქციების ქვეშ იგულისხმება შესაბამისი მწკრივები.*

3.2.1 ამონახსნის კრებადობა ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში

თეორემა 3.1. *(82) და (83) გამოსახულებების მარჯვენა მხარეს მოცემული მწკრივები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in [0, L]$ შუალედზე.*

დამტკიცება. (74) და (87)-დან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} b_1^n &= -\frac{L_1}{\lambda_n^3\rho}\int_0^L \left(X_{n,3}(x_3)x_3^{\kappa}\right)_{,3}\varphi_2(x_3)dx_3 \\ &= \frac{L_1}{\lambda_n^3\rho}\int_0^L X_{n,3}(x_3)x_3^{\kappa}\varphi_{2,3}(x_3)dx_3 \\ &= -\frac{L_1}{\lambda_n^3\rho}\int_0^L X_n(x_3)\varphi_2(x_3)dx_3 \end{aligned} \tag{96}$$

ანალოგიურად:

$$b_2^n = -\frac{L_1}{\lambda_n^2\rho}\int_0^L X_n(x_3)\varphi_1(x_3)dx_3 \tag{97}$$

რადგან (86) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $[0, L]$ შუალედზე და $K(x_3, \xi) \in C([0, L] \times [0, L])$, (77) და (97)-ის გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned} |\varphi_1| &\le \sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)b_2^n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n^2\rho\int_0^L K(x_3,y)X_n(y)b_2^n dy\right| \\ &\le |L_1|\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^L K(x_3,y)\left[\int_0^L X_n(\xi)\varphi_1(\xi)X_n(y)d\xi\right]dy\right| \\ &\le |L_1|\int_0^L |K(x_3,y)|\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_1(\xi)X_n(y)d\xi\right|dy \\ &\le |L_1|\int_0^L |K(x_3,y)|M(y)dy \le |L_1|M\int_0^L |K(x_3,y)|dy < \infty \end{aligned}$$

სადაც

$$M(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_1(\xi)X_n(y)d\xi\right|$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივის ჯამი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $[0,L]$ შუალედზე და $M=\underset{0\leq y\leq L}{max}M(y)$. ანალოგიურად, (96)-დან:

$$|\varphi_2|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n X_n(x_3)b_1^n|<\infty$$

□

თეორემა 3.2. *(80) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს მოცემული მწკრივი, ისევე როგორც მისი t დროით პირველი და მეორე რიგის წარმოებული აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3\in[0,L]$ ინტერვალზე.*

დამტკიცება. (80)-დან, თეორემა 3.1-ის შედეგის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}|u_3(x_3,t)|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)||b_1^n|\,|sin\,(\lambda_n t)|+\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)||b_2^n|\,|cos\,(\lambda_n t)|\\&\leq\frac{1}{\lambda_0}\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n X_n(x_3)b_1^n|+\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)b_2^n|<\infty\end{aligned}$$

(81) გამოსახულებიდან და (86)-ის მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობიდან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}|\dot{u}_3(x_3,t)|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|X_n(x_3)||b_1^n cos(\lambda_n t)|\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|X_n(x_3)||b_2^n sin(\lambda_n t)|\\&\leq\frac{L_1}{\lambda_0^2\rho}\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)|\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi\right|\\&+\frac{L_1}{\lambda_0\rho}\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)|\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi\right|\\&\leq\frac{L_1}{\lambda_0^2\rho}M_2(x_3)+\frac{L_1}{\lambda_0\rho}M_1(x_3)<\infty\end{aligned}$$

სადაც $\lambda_0^2=\underset{n}{min}\lambda_n^2$ და

$$M_\alpha(x_3)=\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)|\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_\alpha(\xi)d\xi\right| \tag{98}$$

ანალოგიურად,

$$|\ddot{u}_3(x_3,t)| \le \frac{L_1}{\lambda_0\rho}\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)|\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi\right|$$
$$+\frac{L_1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x_3)|\left|\int_0^L X_n(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi\right| < \infty$$

□

Remark 3.2. *ლემა 3.2-ის ძალით, λ_n^2 საკუთრივი რიცხვების რაოდენობა არის უსასრულო. ასევე, დამტკიცებული იყო (65)-ით მოცემული $K(x_3,y)$ ბირთვის სიმეტრიულობა (იხ. ლემა (3.1)). ([22])-ში ნაჩვენებია, რომ სიმეტრიული ბირთვის შემთხვევაში ყოველი საკუთრივი რიცხვისთვის არსებობს საკუთრივი ფუნქციების ნორმირებული ორთოგონალური სისტემა და არსებობს ერთი მაინც საკუთრივი რიცხვი. დამატებით, თუ საკუთრივი რიხვების რაოდენობა არის უსასრულო, ისინი ქმიან გადათვლად სიმრავლეს და შესაძლებელია მათი დალაგება აბსოლუტური მნიშვნელობის ზრდის მიხედვით:*

$$|\lambda_1^2| \le |\lambda_2^2| \le ... \le |\lambda_n^2| \le ...$$

შესაბამისად, ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი λ_0^2, რომ $\lambda_0^2 = \min_n \lambda_n^2$.

თეორემა 3.3. *$x_3^\kappa u_{3,3}(x_3,t)$-ის შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in [0,L]$ შუალედზე.*

დამტკიცება. (74)-დან (53) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$X_{n,3}(x_3) = -\frac{1}{x_3^\kappa}\frac{\rho\lambda_n^2}{L_1}\int_0^L K_1(x_3,\xi)X_n(\xi)d\xi$$

სადაც

$$K_1(x_3,\xi) = \begin{cases} \frac{\xi^{1-\kappa}}{L^{1-\kappa}} & 0 \le \xi < x_3 \\ \frac{\xi^{1-\kappa}}{L^{1-\kappa}} - 1 & x_3 \le \xi \le L \end{cases}$$

(80) და (96)-(97)-ის გათვალისწინებით:

$$|x_3^\kappa u_{3,3}\ (x_3,t)| = \left|x_3^\kappa\sum_{n=1}^{\infty}X_{n,3}(x_3)\left(b_1^n sin\left(\lambda_n t\right) + b_2^n cos\left(\lambda_n t\right)\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\rho}{L_1}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^L K_1(\xi)X_n(\xi)\left(b_1^n sin\left(\lambda_n t\right) + b_2^n cos\left(\lambda_n t\right)\right)d\xi\right|$$
$$\le M_k\left[\frac{1}{\lambda_0}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L\left|X_n(\xi)\int_0^L X_n(\eta)\varphi_2(\eta)d\eta\right|d\xi\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L\left|X_n(\xi)\int_0^L X_n(\eta)\varphi_1(\eta)d\eta\right|d\xi\right]$$
$$\le M_k\left[\frac{M_2}{\lambda_0} + M_1\right] < \infty$$

სადაც $M_k = \underset{\xi}{max} K_1(\xi)$, $\lambda_0^2 = \underset{n}{min}\lambda_n^2$ და M_α, $\alpha = 1, 2$ მოცემულია (98)-ით. $\square$

თეორემა 3.4. *$(x_3^\kappa u_{3,3}(x_3,t))_{,3}$-ის შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in (0, L]$ შუალედზე.*

დამტკიცება. თეორემა 3.3-ის შედეგის ძალით, მსგავსად მტკიცდება, რომ:

$$\begin{aligned} \left|\left(x_3^\kappa u_{3,3}(x_3,t)\right)_{,3}\right| &= \left|\kappa x_3^{\kappa-1} u_{3,3} + x_3^\kappa u_{3,33}\right| \\ &\leq \frac{2\kappa\rho}{x_3 L_1}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^L K_1(\xi)X_n(\xi)\left(b_1^n sin\left(\lambda_n t\right)\right.\right. \\ &\quad \left.+ b_2^n cos\left(\lambda_n t\right)\right)d\xi\big| \leq \frac{2\kappa C^*}{x_3} \end{aligned}$$

სადაც C^* წარმოადგენს ისეთ მუდმივს, რომ $|x^\kappa u_{3,3}(x_3,t)| \leq C^*$ (იხ. თეორემა 3.3). $\square$

3.2.2 ამონახსნის კრებადობა არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში

Remark 3.3. *შევნიშნოთ, რომ (77) და (89)-ის გათვალისწინებით $F(x_3,t)$ შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:*

$$F(x_3,t) = \int_0^L K(x_3,y)g(x_3,y,t)dy$$

სადაც $g(x_3,y,t) \in C([0,L],[0,L],t>0)$. აღნიშნული ჩანაწერი გამოყენებული იქნება თეორემა A.3-თან ერთად ქვემოთ მოყვანილ დამტკიცებებში.

თეორემა 3.5. *თუ $F(x_2,t) \in C([0,L],t>0)$, მაშინ (95) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in [0,L]$ ინტერვალზე.*

დამტკიცება.

$$|u_3(x_3,t)| \leq \left|\frac{1}{\rho}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^L F(\xi,\tau)X_n(x_3)(\xi)d\xi\right)X_n(x_3)\right|$$

თუ სრულდება თეორემის პირობები $F(x_3,t)$-სთვის, მაშინ თეორემა A.3-ისა და შენიშვნა 3.3-ის ძალით

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L F(\xi,\tau)X_n(x_3)(\xi)d\xi\right)X_n(x_3)$$

აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $[0,L]$ ინტერვალზე, შესაბამისად

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L F(\xi,\tau)X_n(x_3)(\xi)d\xi\right)X_n(x_3) \leq c(\tau)$$

და

$$|u_3(x_3,t)| \leq \left|\frac{1}{\rho\lambda_0}\int_0^t c(\tau)d\tau\right| < \infty$$

სადაც $\lambda_0^2 = \underset{n}{min}\lambda_n^2$. $\square$

თეორემა 3.6. *თუ $F(.,t) \in C([0,L])$ და $F(x_3,.) \in C(t>0) \cap C^1(t>0) \cap C^2(t>0)$, მაშინ (95) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივის დროით პირველი და მეორე რიგის წარმოებული აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in [0,L]$ ინტერვალზე.*

დამტკიცება. თეორემა (3.5)-ის დამტკიცების მსგავსად:

$$|\dot{u}_3(x_3,t)| \le \left| \frac{1}{\rho} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \dot{F}(\xi,\tau) X_n(x_3)(\xi) d\xi \right) X_n(x_3) \right| + \left| \frac{1}{\rho} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L F(\xi,\tau) X_n(x_3)(\xi) d\xi \right) X_n(x_3) \right| < \infty$$

□

თეორემა 3.7. *თუ $F(x_2,t) \in C([0,L], t>0)$, მაშინ $x_3^{\kappa} u_3(x_3,t)$-ის შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in [0,L]$ ინტერვალზე.*

დამტკიცება. თეორემა 3.5-ის დამტკიცების მსგავსად:

$$|x_3^{\kappa} u_3(x_3,t)| \le \left| \frac{x_3^{\kappa}}{\rho\lambda_0} \int_0^t c(\tau) d\tau \right| < \infty$$

□

თეორემა 3.8. *თუ $F(x_2,t) \in C([0,L], t>0)$, $(x_3^{\kappa} u_3(x_3,t))_{,3}$-ის შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია $x_3 \in (0,L]$ შუალედზე.*

დამტკიცება. თეორემა 3.5 და თეორემა 3.7-ის დამტკიცების მსგავსად:

$$|(x_3^{\kappa} u_3(x_3,t))_{,3}| \le \left| \frac{x_3^{\kappa}}{\rho\lambda_0} \int_0^t c(\tau) d\tau \right| + \left| \frac{\kappa x_3^{\kappa-1}}{\rho\lambda_0} \int_0^t c(\tau) d\tau \right| < \infty$$

□

4 ანალიზური ამოხსნები MATLAB-ით

მოცემულ პარაგრაფში ნაჩვენებია პარაგრაფ 2-ში განხილული ამოცანების ამონახსნების გრაფიკები. გამოთვლების დროს კონსტიტუციური კოეფიციენტები და სხვა მუდმივები აღებულ იქნა $CoFe_2O_4$ (PM) და $BaTiO_3$ (PE)-ის ნარევის შემთხვევაში, მოცულობითი ფარდობით $\frac{c_{PE}}{c_{PM}} = .25$

[32]:

$$\begin{pmatrix} E_{1333} & E_{2333} & E_{3333} \\ p_{313} & p_{323} & p_{333} \\ q_{313} & q_{323} & q_{333} \\ \varsigma_{33} & \tilde{a}_{33} & \xi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^0_{1333} & E^0_{2333} & E^0_{3333} \\ p^0_{313} & p^0_{323} & p^0_{333} \\ q^0_{313} & q^0_{323} & q^0_{333} \\ \varsigma^0_{33} & \tilde{a}^0_{33} & \xi^0_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 243 \times 10^9 \\ 0 & 0 & 4.65 \\ 0 & 0 & 12.6 \\ 3.22 \times 10^{-9} & 0 & 1.2 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

და $\rho = 5.43 \times 10^3$.

ღეროს L სისქე მიჩნეულია 10-ის ტოლად.

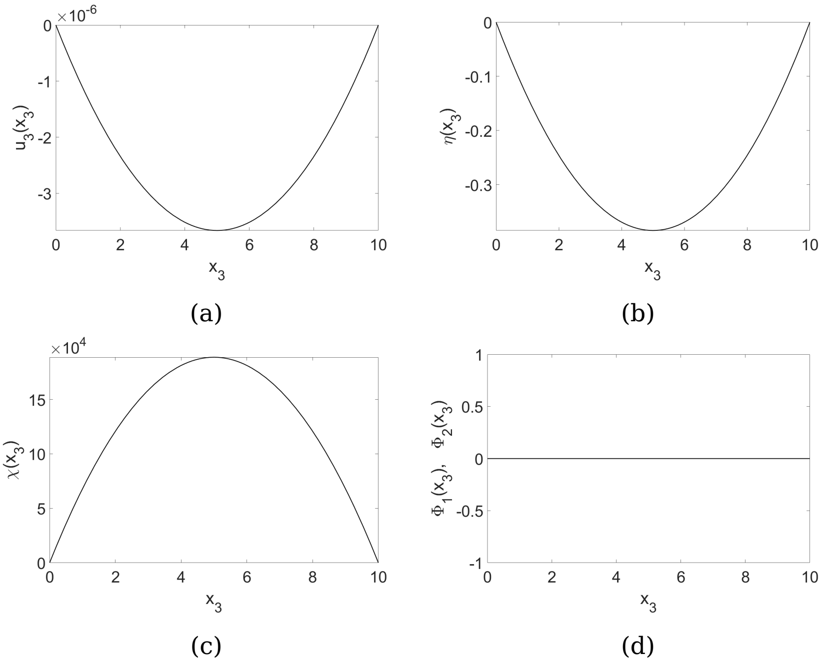
Remark 4.1. *ყველა კოეფიციენტის და მუდმივის განზომილება არის SI-სისტემაში.*

Remark 4.2. *MATLAB-ის კოდები მოცემულ პარაგრაფში განხილული ამოცანებისთვის მოცემულია დამატება B-ში.*

4.1 კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს

4.1.1 სტატიკის ამოცანა

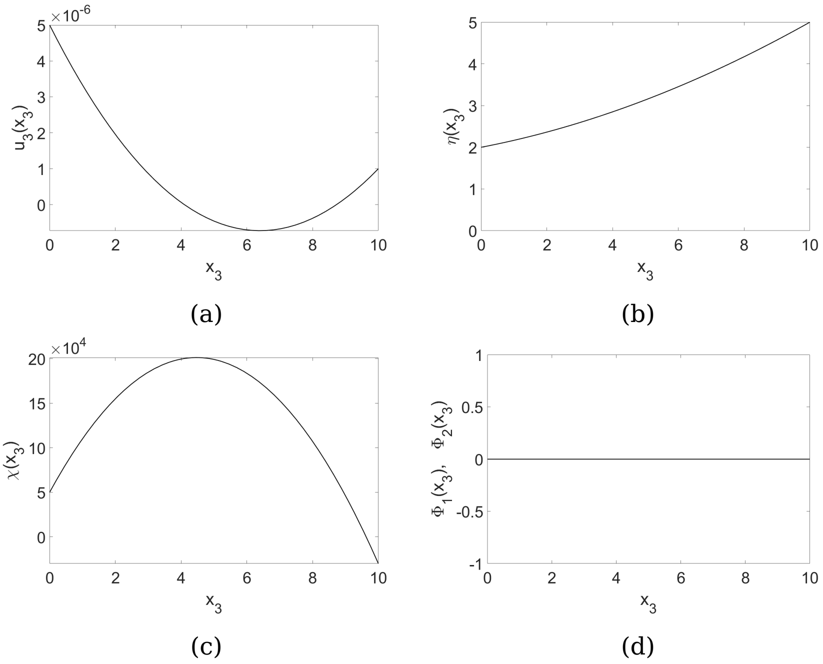
მოცემულ პარაგრაფში წარმოდგენილია (15), (16), (18) განტოლებათა სისტემის ამონახსნების გრაფიკები. u_3, η და χ-სთვის ამონახსნები მიღებულ იქნა (20), (21) და (22) განტოლებებიდან MATLAB-ის ფუნქციის 'dsolve' მეშვეობით. განხილულია ორი შემთხვევა: სურ. 4.1-ზე ნაჩვენებია დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები ერთგვაროვანი (19) სასაზღვრო პირობებისა და მუდმივი ცნობილი ფუნქციების (f_e მუხტის სიმკვრივე და Φ_3 - მოცულობითი ძალების მდგენელი x_3 ღერძის მიმართულებით) პირობებში; სურ. 4.2-ზე ნაჩვენებია ამონახსნები არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების პირობებში, როდესაც მოცულობითი ძალების x_3 ღერძის გასწვრივ მდგენელს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi_3 = 10^3 x_3$.



(a) (b)

(c) (d)

სურ 4.1: გადაადგილება (a), მაგნიტური პოტენციალი (b), ელექტრული პოტენციალი (c) და მოცულობითი ძალების მდგენელები x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ (d), როგორც x_3-ის ფუნქციები. $f_e(x_3) = 5 \times 10^{-5}$, $\Phi_3(x_3) = 10^3$; ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები.



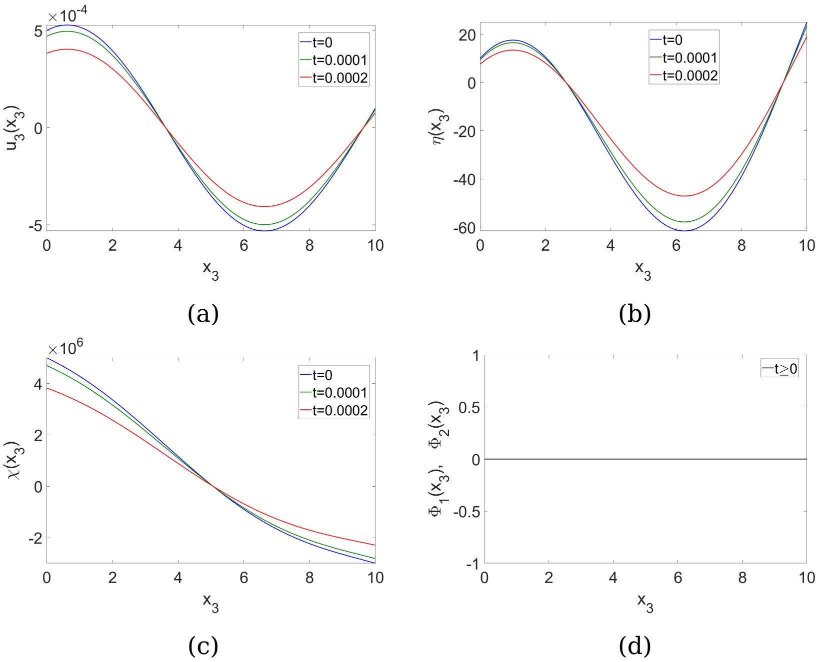
(a) (b)

(c) (d)

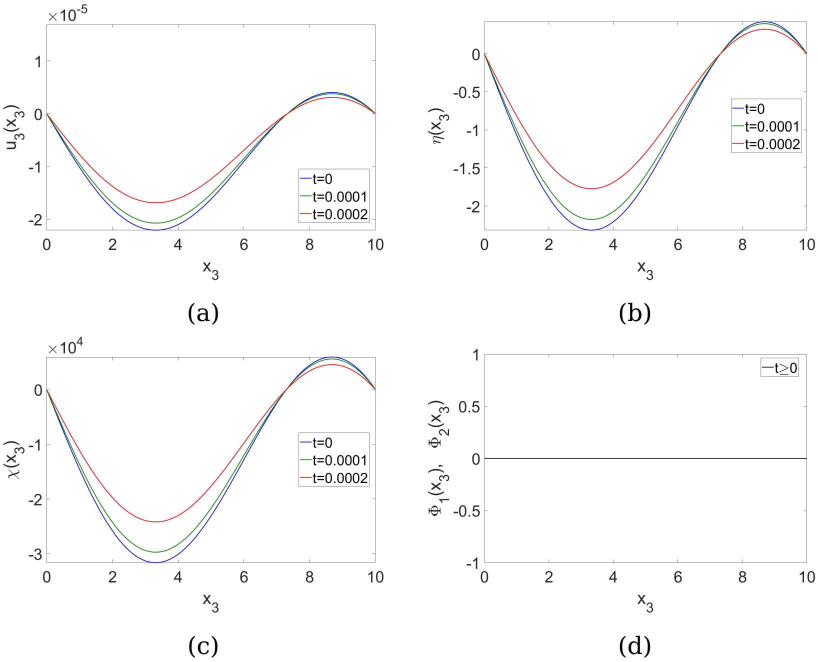
სურ 4.2: გადაადგილება (a), მაგნიტური პოტენციალი (b), ელექტრული პოტენციალი (c) და მოცულობითი ძალების მდგენელები x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ (d), როგორც x_3-ის ფუნქციები. $f_e(x_3) = 10^{-5}$, $\Phi_3(x_3) = 10^3 x_3$; სასაზღვრო პირობები: $a_0 = 5 \times 10^{-6}$, $a_1 = 10^{-6}$, $b_0 = 5 \times 10^4$, $b_1 = -3 \times 10^4$, $d_0 = 2$, $d_1 = 5$.

4.1.2 დინამიკის ამოცანა

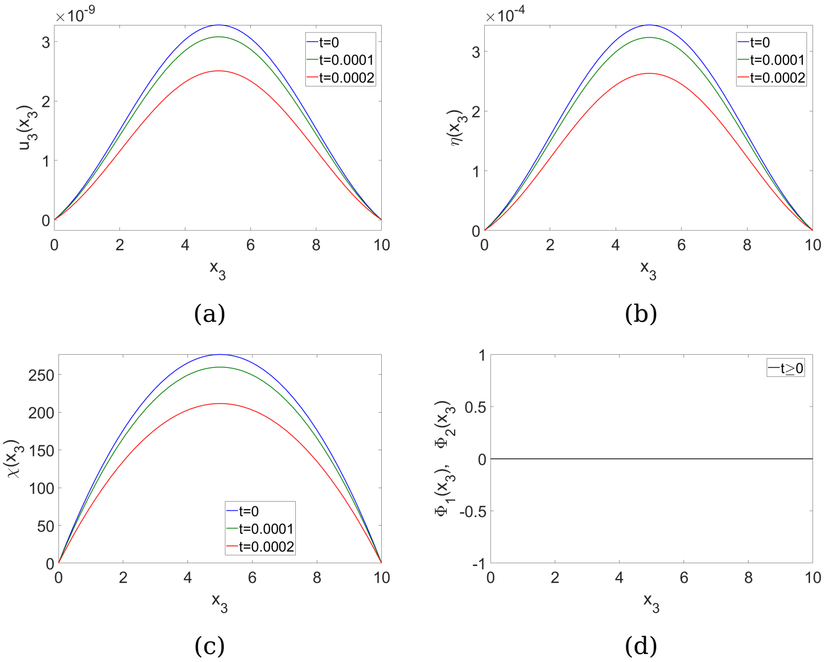
მოცემულ პარაგრაფში წარმოდგენილია (14)-(16) განტოლებათა სისტემის ამონახსნების გრაფიკები. u_3, η და χ-სთვის ამონახსნები მიღებულ იქნა (38), (21) და (22) განტოლებებიდან MATLAB-ის ფუნქციის 'dsolve' მეშვეობით. განხილულია სამი შემთხვევა: სურ. 4.3-ზე ნაჩვენებია ამონახსნები არაერთგვაროვანი (19) სასაზღვრო პირობებისა და მუდმივი ცნობილი ფუნქციების (f_e მუხტის სიმკვრივე და Φ_3 - მოცულობითი ძალების მდგენელი x_3 ღერძის მიმართულებით) პირობებში; სურ. 4.4-ზე ნაჩვენებია ამონახსნები ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, როდესაც მოცულობითი ძალების x_3 ღერძის გასწვრივ მდგენელს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi_3 = 10^5 x_3$; სურ. 4.5-ზე ნაჩვენებია ამონახსნები ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, როდესაც მოცულობითი ძალების x_3 ღერძის გასწვრივ მდგენელს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi_3 = 10^5 cos(x_3)$.



სურ 4.3: გადაადგილება (a), მაგნიტური პოტენციალი (b), ელექტრული პოტენციალი (c) და მოცულობითი ძალების მდგენელები x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ (d), როგორც x_3-ის ფუნქციები. $f_e(x_3) = 7 \times 10^{-8}$, $\Phi_3(x_3) = 10^5$; სასაზღვრო პირობები: $a^* = 5 \times 10^{-4}$, $a^* = 10^{-4}$, $a_0 = 5 \times 10^6$, $a_L = -3 \times 10^6$, $b_0 = 10$, $b_L = 25$.



სურ 4.4: გადაადგილება (a), მაგნიტური პოტენციალი (b), ელექტრული პოტენციალი (c) და მოცულობითი ძალების მდგენელები x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ (d), როგორც x_3-ის ფუნქციები. $f_e(x_3) = 7 \times 10^{-8}$, $\Phi_3(x_3) = 10^5 x_3$; ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები.



სურ 4.5: გადაადგილება (a), მაგნიტური პოტენციალი (b), ელექტრული პოტენციალი (c) და მოცულობითი ძალების მდგენელები x_1 და x_2 ღერძის გასწვრივ (d), როგორც x_3-ის ფუნქციები. $f_e(x_3) = 7 \times 10^{-8}$, $\Phi_3(x_3) = cos(x_3)$; ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები.

Remark 4.3. *როგორც გრაფიკებში ვხედავთ, აღნიშნული მასალისთვის Φ_α, $\alpha = 1, 2$ იგივურად ნულის ტოლია $x_3 \in [0, L]$ ინტერვალზე როგორც სტატიკის, ასევე დინამიკის ამოცანის შემთხვევაში. ეს იმას ნიშნავს, რომ იმისათვის რომ აღნიშნული სხეული დეფორმირდეს მხო-*

ლოდ x_3 *ღერძის გასწვრივ, არ არის საჭირო მოცულობითი ძალების დამატებით მოდება* x_1 *და* x_2 *ღერძების გასწვრივ.*

დასკვნა

არაერთგვაროვანი პიეზოელექტრული დრეკადი ღეროსთვის შესწავლილ იქნა სტატიკის და დინამიკის ამოცანები შემთხვევებისთვის, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს და როდესაც ისინი მოიცემიან x_3 სივრცითი ცვლადის ხარისხოვანი ფუნქციების სახით, ე.ი. აქვთ შემდეგი სახე: $const. \times x_3^{\kappa}$, სადაც $\kappa = const. \in (0, 1)$. შემთხვევისთვის, როდესაც კონსტიტუციური ცვლადები მუდმივებია ამონახსნები ჩაიწერა ანალიზური სახით, როგორც x_3 სივრცითი ცვლადისა და t დროის ფუნქციები. შემთხვევისთვის, როდესაც კონსტიტუციური ცვლადები წარმოადგენენ x_3 ცვლადის ხარისხოვან ფუნქციებს, ამონახსნი ჩაიწერა აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით და დამტკიცდა, რომ ამონახსნი არის რხევადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც L_1 მუდმივი, განსაზღვრული (66)-ით, არის დადებითი.

შემთხვევისთვის, როდესაც კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს, ამოიხსნა ამოცანები სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებისა და ცნობილი ფუნქციების (f_e მუხტის სიმკვრივე და Φ_3 - მოცულობითი ძალების x_3 ღერძის გასწვრივი მდგენელი) პირობებში. ამონახსნების გრაფიკები წამოდგენილი იყო MATLAB-ის დახმარებით.

ლიტერატურა

[1] Eringen A.C. *Mechanics of continua*. Krieger, 01 1980.

[2] D.N. Astrov. Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres ‘ faces inclinées. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1960.

[3] T. Buchukuri, O. Chkadua, Duduchava R., and Natroshvili D. Interface crack problems for metallic-piezoelectric composite structures. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 55, 01 2012.

[4] Natalia Chinchaladze. On some analytic methods for calculating of cusped prismatic shells. *PAMM*, 14, 12 2014.

[5] J. Curie and Curie. P. Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres faces ‘ inclinées. *C R Acad Sci Gen 91:294–295*, 1880.

[6] J. Curie and Curie. P. Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres ‘ faces inclinées. *C R Acad Sci Gen 91:383–386*, 1880.

[7] Natroshvili D. *Mathematical Problems of Thermo-Electro-Magneto-Elasticity*, volume 12 of *Lecture Notes of TICMI*. Tbilisi University Press, 2011.

[8] Moon F. and Graneau P. Magneto-solid mechanics. *Physics Today*, 38:79–, 01 1985.

[9] V. J. Folen, G. T. Rado, and E. W. Stalder. Anisotropy of the magnetoelectric effect in $\mathrm{cr}_2\mathrm{o}_3$. *Phys. Rev. Lett.*, 6:607–608, Jun 1961.

[10] Amelchenko A. G., Bardin V. A., VasiFev V. A., Krevchick V. D., Chernov P. S., and Shcherbakov M. A. Piezo actuators and piezo motors for driving systems. In *2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, pages 1–4, 2016.

[11] Jaiani G. Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 95, 09 2013.

[12] Jaiani G. Hierarchical models for viscoelastic kelvin-voigt prismatic shells with voids. *Bulletin of TICMI*, 21:33–44, 01 2017.

[13] Jaiani G. *Piezoelectric Viscoelastic Kelvin-Voigt Cusped Prismatic Shells*, volume 19 of *Lecture Notes of TICMI*. Tbilisi University Press, 2018.

[14] Jaiani G. and Bitsadze L. On basic problems for elastic prismatic shells with microtemperatures. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 96, 12 2015.

[15] Jaiani G. and Bitsadze L. Basic problems of thermoelasticity with microtemperatures for the half-space. *Journal of Thermal Stresses*, 41:1–14, 07 2018.

[16] Vekua I. On a way of calculating of prismatic shells. *Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences*, pages 21:191–259, 1955. (Russian).

[17] Vekua I. The theory of thin shallow shells of variable thickness. *Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences*, pages 30:5–103, 1965. (Russian).

[18] R.P. Kanwal. *Linear Integral Equations: Theory & Technique*. Modern Birkhäuser Classics. Springer New York, 2012.

[19] P. Kythe and P. Puri. *Computational Methods for Linear Integral Equations*. Springer Science+Business Media, LLC, 01 2002.

[20] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media; 2nd ed.* Course of theoretical physics. Butterworth, Oxford, 1984.

[21] G. Lippmann. Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. *J. Phys. Theor. Appl.*, 10(1):381–394, 1881.

[22] W.V. Lovitt. *Linear Integral Equations*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 1950.

[23] Taha M., Walia S., Ahmed T., Headland D., Withayachumnankul W., Sriram S., and Bhaskaran M. Insulator-metal transition in substrate-independent vo2 thin film for phase-change devices. *Scientific Reports*, 7(1), 2017.

[24] Trindade M. Applications of piezoelectric sensors and actuators for active and passive vibration control. 05 2008.

[25] Chinchaladze N. *On Some Nonclassical Problems for Differential Equations and Their Applications to the Theory of Cusped Prismatic Shells*, volume 9 of *Lecture Notes of TICMI*. Tbilisi University Press, 2008.

[26] Chinchaladze N. On one problem of a cusped elastic prismatic shells in case of the third model of vekua s hierarchical model. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 5, 12 2016.

[27] Chinchaladze N. and Tutberidze M. On some bending problems of prismatic shell with the thickness vanishing at infinity. *Journal of Mathematics and System Science*, 7, 03 2017.

[28] Chinchaladze N. and Gilbert R. Harmonic vibration of prismatic shells in zero approximation of vekua's hierarchical models. *Applicable Analysis*, 92:2275–2287, 11 2013.

[29] Mittal N., Ansari F., Gowda V. K., Brouzet Ch., Chen P., Larsson P., Roth S., Lundell F., Wågberg L., Kotov N., and Söderberg D. Multiscale control of nanocellulose assembly: Transferring remarkable nanoscale fibril mechanics to macroscale fibers. *ACS Nano*, 12, 05 2018.

[30] Cugat O., Delamare J., and Reyne G. Magnetic micro-actuators systems (magmas). In *2003 IEEE International Magnetics Conference (INTERMAG)*, pages GB–04, 2003.

[31] Dineva P., Gross D., Müller R., and Rangelov T. *Dynamic Fracture of Piezoelectric Materials*, volume 212. 01 2014.

[32] E. Pan and W. Chen. *Static Green's Functions in Anisotropic Media*. Cambridge University Press, 2015.

[33] Toupin R.A. A dynamical theory of elastic dielectrics. *International Journal of Engineering Science*, 1:101–126, 03 1963.

[34] Lang S. Guide to the literature of piezoelectricity and pyroelectricity. 28. *Ferroelectrics*, 361:130–216, 12 2007.

[35] Buchukuri T., Chkadua O., and Natroshvili D. Mathematical problems of generalized thermo-electro-magneto-elasticity theory. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 68:1–166, 01 2016.

[36] Buchukuri T., Chkadua O., and Natroshvili D. Mixed boundary value problems of pseudo-oscillations of generalized thermo-electro-magneto-elasticity theory for solids with interior cracks. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 170, 09 2016.

[37] Nowacki W. *Efecty electromagnetyczne w stalych cialach odkształcalnych. Warszawa*. Panstwowe Widawnictwo Naukowe, 1983. [Russian translation: Electromagnetic effects in solids, Moscow, Mir, 1986].

[38] Y. Wang and X. Xia. Magnetoelectric coupling and interface effects of multiferroic composites under stress-prescribed boundary condition. *Reviews on Advanced Materials Science*, 48:78–90, 01 2017.

[39] Boyce W.E. and DiPrima R.C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 2001.

დანართი A დამატებითი (ჰილბერტ-შმიდტის) თეორემები

მოცემულ დანართში მოყვანილი თეორემების დამტკიცებები შესაძლებელია ინახოს შემდეგ ლიტერატურებში: (Lovitt. *Linear Integral Equations*. 2005), (Kanwal R.P., Linear Integral Equations, Second Edition, 1997).

თეორემა A.1. *თუ $u(x_3)$-ს აქვს შემდეგი სახე*

$$u(x_3) = \lambda \int_0^L R(x_3, \xi) f(\xi) d\xi$$

სადაც $f(x_3)$ წარმოადგენს უბან-უბან უწყვეტ ფუნქციას $[0, L]$ ინტერვალზე და $R(x_3, \xi) \in C([0, L] \times [0, L])$ წარმოადგენს სიმეტრიულ ბირთვს, მაშინ

$$u(x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, Y_n) Y_n(x_3) \tag{99}$$

სადაც

$$(u, Y_n) := \int_0^L u(x_3) Y_n(x_3) dx_3$$

Y_n არის $R(x_3, \xi)$-ის საკუთრივი ფუნქციები და (99)-ის მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივი არის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი $[0, L]$ ინტერვალზე.

თეორემა A.2. *თუ სიმეტრიული ბირთვის λ_n საკუთრივი რიცხვების რაოდენობა სასრულია, მაშინ*

$$R(x_3, \xi) = \sum_{n=1}^{N} \frac{Y_n(x_3) Y_n(\xi)}{\lambda_n}$$

თეორემა A.3. *თუ $f(x_3) \in C([0, L])$, მაშინ*

$$\int_0^L R(x_3, \xi) f(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, Y_n)}{\lambda_n} Y_n,$$

სადაც მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივი არის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი, $R(x_3, \xi)$ წარმოადგენს სიმეტრიულ ბირთვს x_3 და ξ ცვლადების მიმართ; Y_n არის R-ის λ_n საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები.

თეორემა A.4. *ყოველი ნამდვილი $K(x, t)$, $x, t \in [a, b]$ სიმეტრიული ბირთვისთვის არსებობს სრული ნორმირებული ორთოგონალური სისტემა $\psi_r(x)$ საკუთრივი ფუნქციებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:*

1) $\psi_r(x)$ *წარმოადგენს λ_r-ის შესაბამის საკუთრივ ფუნქციას*

$$\psi_r(x) = \lambda_r \int_a^b K(x, t) \psi_r(t) dt$$

2) $\int_a^b \psi_r^2(x) dx = 1$

3) $\int_a^b \psi_r(x) \psi_s(x) dx = 0, \qquad (r \neq s)$

4) $\psi_r(x)$ *ნამდვილია.*

5) *ყოველი საკუთრივი ფუნქცია* $\varphi(x)$ *შესაძლებელია წარმოდგინდეს შემდეგი სახით:*

$$\varphi(x) = c_{r_1}\psi_{r_1}(x) + ... + c_{r_m}\psi_{r_m}(x)$$

თეორემა A.5. *თუ* $K(x,t)$ *ნამდვილი, სიმეტრიული და უწყვეტია და* $\not\equiv 0$*, მაშინ ყველა საკუთრივი რიცხვი არის ნამდვილი.*

თეორემა A.6. *თუ* $f(x)$ *უწყვეტი ფუნქციაა და შესაძლებელია მისი წარმოდგენა შემდეგი სახით:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a,b]$ *შუალედზე, მაშინ* c_n *კოეფიციენტები მოიცემა შემდეგი სახით:*

$$c_n = \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx \equiv (f\psi_n)$$

და

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f\psi_n)\psi_n(x)$$

სადაც ψ_n *ეკუთვნის სიმეტრიული ბირთვის საკუთრივი რიცხვების სრულ ნორმირებულ ორთოგონალურ სისტემას.*

დანართი B MATLAB-ის კოდები პარაგრაფ 4-ში ამოხსნილი ამონახსნებისთვის

B.1 კონსტიტუციური კოეფიციენტები წარმოადგენენ მუდმივებს

B.1.1 სტატიკის ამოცანა

```
syms f_e(x_3) Phi_3(x_3) u_3(x_3) eta(x_3) chi(x_3) Phi_alpha(x_3)
%% Defining constants and given functions
L = 10; % Thickness of the plate
rho = 5.43*10^3; % Density of the material

f_e(x_3) = 5*10^(-5); % Charge density function
% Phi_3(x_3) = 10^3; % Volume force along x_3 axis (Figure 6.1)
Phi_3(x_3) = 10^3*x_3; % Volume force along x_3 axis (Figure 6.2)



% Constitutive Coefficients
E_i333 = [0 0 243*10^9];
p_3i3 = [0 0 4.65];
q_3i3 = [0 0 12.6];
sigma_33 = 3.22*10^(-9);
a_33 = 0;
xi_33 = 1.2*10^(-4);

% Constants constructed from constitutive coefficients
L_1i = E_i333 + p_3i3*(xi_33*p_3i3(3)-a_33*q_3i3(3)) - ...
    q_3i3*(a_33*p_3i3(3)-sigma_33*q_3i3(3))/(xi_33*sigma_33-(a_33)^2);
L_2i = (p_3i3*xi_33-q_3i3*a_33)/(xi_33*sigma_33-(a_33)^2);
L_3 = xi_33/(xi_33*sigma_33-(a_33)^2);
L_4 = (p_3i3(3)*a_33 - sigma_33*q_3i3(3))/((a_33)^2-xi_33*sigma_33);
L_5 = a_33/((a_33)^2-xi_33*sigma_33);

% Non-homogeneous Boundary Conditions
a_0 = 5*10^(-6);
a_1 = 10^(-6);
b_0 = 5*10^4;
b_1 = -3*10^4;
d_0 = 2;
d_1 = 5;

%% Solving differential equations
D2uDx2 = diff(u_3,2);
D2etaDx2 = diff(eta,2);
```

```
D2chiDx2 = diff(chi,2);

eq1 = L_1i(3)*D2uDx2 - L_2i(3)*f_e(x_3) + Phi_3(x_3) == 0;
bc1='u_3(0)=a_0,u_3(L)=a_1';
S1=dsolve(eq1,bc1,x_3);
u_3(x_3)=eval(vectorize(S1));

eq2 = D2etaDx2 == L_4*diff(u_3,2) - L_5*f_e(x_3);
bc2='eta(0)=d_0,eta(L)=d_1';
S2=dsolve(eq2,bc2,x_3);
eta(x_3)=eval(vectorize(S2));

eq3 = D2chiDx2 == L_2i(3)*diff(u_3,2) - L_3*f_e(x_3);
bc3='chi(0)=b_0,chi(L)=b_1';
S3=dsolve(eq3,bc3,x_3);
chi(x_3)=eval(vectorize(S3));

Phi_alpha(x_3)=(L_2i(1:2)-(L_1i(1:2)/L_1i(3))*L_2i(3))*f_e(x_3)+...
    (L_1i(1:2)/L_1i(3))*Phi_3(x_3);

%% Plotting solutions
figure(1)
fplot(u_3,[0 L],'k','linewidth',2)
xlabel('x_3')
ylabel('u_3(x_3)')

figure(2)
fplot(eta,[0 L],'k','linewidth',2)
xlabel('x_3')
ylabel('\eta(x_3)')

figure(3)
fplot(chi,[0 L],'k','linewidth',2)
xlabel('x_3')
ylabel('\chi(x_3)')

figure(4)
fplot(Phi_alpha(1),[0 L],'k','linewidth',2)
xlabel('x_3')
ylabel('\Phi_1(x_3),    \Phi_2(x_3)')
```

B.1.2 დინამიკის ამოცანა

```
syms f_e(x_3) Phi(x_3) u_3(x_3) eta(x_3) chi(x_3) Phi_alpha(x_3)...
    g(x_3)
%% Defining constants and given functions
L = 10; % Thickness of the plate
rho = 5.43*10^3; % Density of the material
omega = 3500; % Frequency of oscillation

f_e(x_3) = 7*10^(-8); % Charge density function (see eq. (30))
% Phi(x_3) = 10^5;  % Volume force along x_3 axis (Figure 6.3)
% Phi(x_3) = 10^5*x_3; % Volume force along x_3 axis (Figure 6.4)
Phi(x_3) = cos(x_3);  % Volume force along x_3 axis (Figure 6.5)

% Constitutive Coefficients
E_i333 = [0 0 243*10^9];
p_3i3 = [0 0 4.65];
q_3i3 = [0 0 12.6];
sigma_33 = 3.22*10^(-9);
a_33 = 0;
xi_33 = 1.2*10^(-4);

% Constants constructed from constitutive coefficients
L_1i = E_i333 + p_3i3*(xi_33*p_3i3(3)-a_33*q_3i3(3)) - ...
   q_3i3*(a_33*p_3i3(3)-sigma_33*q_3i3(3))/(xi_33*sigma_33-(a_33)^2);
L_2i = (p_3i3*xi_33-q_3i3*a_33)/(xi_33*sigma_33-(a_33)^2);
L_3 = xi_33/(xi_33*sigma_33-(a_33)^2);
L_4 = (p_3i3(3)*a_33 - sigma_33*q_3i3(3))/((a_33)^2-xi_33*sigma_33);
L_5 = a_33/((a_33)^2-xi_33*sigma_33);

omega_0 = sqrt(rho*omega^2/L_1i(3));
% RHS of differential equation
g(x_3) = L_2i(3)*f_e(x_3)/L_1i(3) - Phi(x_3)/L_1i(3);

% Non-homogeneous Boundary Conditions
a = 0; %5*10^(-4);
b = 0; %10^(-4);
a_0 = 0; %5*10^6;
a_L = 0; %-3*10^6;
b_0 = 0; %10;
b_L = 0; %25;

%% Solving differential equations
```

```
D2uDx2 = diff(u_3,2);
eq1 = D2uDx2 == -omega_0^2*u_3 + g(x_3);
bc1='u_3(0)=a,u_3(L)=b';
S1=dsolve(eq1,bc1,x_3);
u_3(x_3) = eval(vectorize(S1));

D2etaDx2 = diff(eta,2);
eq2 = D2etaDx2 == L_4*diff(u_3,2) - L_5*f_e(x_3);
bc2='eta(0)=b_0,eta(L)=b_L';
S2=dsolve(eq2,bc2,x_3);
eta(x_3)=eval(vectorize(S2));

D2chiDx2 = diff(chi,2);
eq3 = D2chiDx2 == L_2i(3)*diff(u_3,2) - L_3*f_e(x_3);
bc3='chi(0)=a_0,chi(L)=a_L';
S3=dsolve(eq3,bc3,x_3);
chi(x_3)=eval(vectorize(S3));

Phi_alpha = -L_1i(1:2)*u_3(x_3) + L_2i(1:2)*f_e(x_3);

%% Plotting solutions (Animation)
%Initialize plots
filename = '(Fig. 6.5)din_constCoeff_nonconstFun2_homogen.gif';
N = 100;
x = 0:1/N:L;
u3Data = u_3(x);
etaData = eta(x);
chiData = chi(x);

h = figure(1);
axis tight manual
subplot(221)
u3plot = plot(x,zeros(size(x)),'k','linewidth',2);
ylim([-4*10^(-9) 4*10^(-9)]) % Scaled for specific solution
xlabel('x_3')
ylabel('u_3(x_3)')

subplot(222)
etaplot = plot(x,zeros(size(x)),'k','linewidth',2);
ylim([-4*10^(-4) 4*10^(-4)]) % Scaled for specific solution
xlabel('x_3')
ylabel('\eta(x_3)')
```

```
subplot(223)
chiPlot = plot(x,zeros(size(x)),'k','linewidth',2);
ylim([-300 300]) % Scaled for specific solution
xlabel('x_3')
ylabel('\chi(x_3)')

subplot(224)
fplot(Phi_alpha(1),[0 L],'k','linewidth',2)
hold on
fplot(Phi_alpha(2),[0 L],'k','linewidth',2)
hold off
xlabel('x_3')
ylabel('\Phi_1(x_3),   \Phi_2(x_3)')

% Making Animation
for t=0:0.00005:0.0018
    u3plot.YData = u3Data*cos(omega*t);
    etaplot.YData = etaData*cos(omega*t);
    chiPlot.YData = chiData*cos(omega*t);
    suptitle(strcat('t = ',num2str(t)));
    drawnow();
    % Capture the plot as an image and save to .gif
    frame = getframe(h);
    im = frame2im(frame);
    [imind,cm] = rgb2ind(im,256);
    if t==0
        imwrite(imind,cm,filename,'gif', 'Loopcount',inf);
    else
        imwrite(imind,cm,filename,'gif','WriteMode','append');
    end
end
```

დანართი C დამატებითი შენიშვნები

C.1 საკუთრივი რიცხვებისა და საკუთრივი ფუნქციების განმარტების შესახებ

ფრედჰოლმის ერთგვაროვანი განტოლებისთვის:

$$\int_a^b K(s,t)g(t)dt = \mu g(s), \quad \mu = 1/\lambda$$

გვაქვს კლასიკური ამოცანა საკუთრიი რიხვების ან მახასიათებელი მუდმივების მიმართ. ინტეგრალური განტოლებების შესახებ ლიტერატურებში ზოგიერთი ავტორი იყენებს λ აღნიშვნას მხოლოდ საკუთრივი რიცხვებისთვის, ზოგიერთი კი μ-თი აღნიშნავს საკუთრივ რიცხვებს ან მახასიათებელ მუდმივებს, ისეთს, რომ $\lambda\mu = 1$.

რადგანაც ჩვენ განვიხილავთ ინტეგრალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$g(s) = \lambda^2 \int_a^b K(s,t)g(t)dt$$

ათნიშნულ ნაშრომში საკუთრივი რიცხვები აღნიშნულია λ^2-თი და არა $\frac{1}{\lambda^2}$-თი. $g(t)$ წარმოადგენს შესაბამის საკუთრივ ფუნცქციას. მოცემული აღნიშვნით, ინტეგრალური განტოლების ბირთვის λ^2 საკუთრივი რიცხვები ემთხვევა შესაბამისი დიფერენციალური განტოლების საკუთრივ რიცხვებს. [1][2]

---

[1]Kanwal R.P., Linear Integral Equations, Second Edition, 1997

[2]Kythe P.K., Computational Methods for Linear Integral Equations, 2002