



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მიმართულება: გამოყენებითი მათემატიკა

სამაგისტრო ნაშრომი თემაზე

მრავალნიშნა ლოგიკების შესახებ

დავით ბარამიძე

ხელმძღვანელი

ასოცირებული პროფესორი: რევაზ გრიგოლია

თბილისი 2020

ს ა რ ჩ ე ვ ი

1. ანოტაცია (ქართულად) -----	3
2. ანოტაცია (ინგლისურად) -----	4
3. შესავალი -----	5
4. როგორ არის ორგანიზებული ეს კვლევები-----	6
5. ზოგადი თეორია-----	7
6. სემანტიკა-----	8
7. ზოგიერთი ლოგიკური აღრიცხვები -----	9
8. პოსტის სისტემები-----	11
9. ლუკასევიჩის სისტემები-----	13
10. ბოჩვარისა და კლინის სისტემები-----	18
11. გეოდელის სისტემა-----	19
12. ბელნაპის სისტემა-----	20
13. MV-ალგებრები-----	22
14. თავისუფალი MV- ალგებრა-----	31
15. დასკვნა-----	34
16. გამოყენებული ლიტერატურა-----	36

ანოტაცია

ნაშრომი ეძღვნება მრავალნიშნა ლოგიკების მიმოხილვას. ზოგადი თეორიის დაწყებით, შემდგომ განხილულია პოპულარული მრავალნიშნა ლოგიკები, ისეთები როგორიცაა პოსტის ლოგიკები, გოედელის ლოგიკა, ლუკასევიჩის ლოგიკა, ბოჩვარის და კლინის ლოგიკები, და ბელნაპის ლოგიკა და მათი შესაბამისი ალგებრები (მატრიცები).

Anotation

This work devoted to a survey on many-valued logic. Beginning with the general theory it is considered popular many-valued logics such as Post logics, Gödel logic, Lukasiewicz logic, Bochvar and Kleene logics, and Belnap logic and corresponding to them algebras (matrixes).

შესავალი

უმარტივესი და ალბათ საუკეთესო პასუხი არის ისტორიული: მრავალნიშნა ლოგიკა არის რთული კვლევები, რომლებიც წარმოიშვა ლუკასევიჩისა და პოსტის ნაშრომებიდან ოციან წლებში. იდეა ამ კვლევების წარმოდგენს კლასიკური ლოგიკის მნიშვნელობების გაფართოებაში, ჭეშმარიტების-მნიშვნელობათა უფრო დიდი სიმრავლის გათვალისწინებაში ჩვეულებრივი $\{0, 1\}$ -სგან განსხვავებით. ახალი სიმრავლე შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო და, უმეტეს შემთხვევაში, მას გააჩნია მესერული დალაგება. ეს გახდის მას დალაგებულ სიმრავლედ, ან მესერად, რომელსაც აქვს უდიდესი ელემენტი ("სრულიად ჭეშმარიტი") და უმცირესი ელემენტით ("სრულიად მცდარი").

ზოგადად კიდევ რამდენიმე პირობაა წარმოდგენილი:

1. არსებობს კავშირების სასრული რაოდენობა, სასრული რაოდენობა არგუმენტებით;
2. კავშირი არის ფუნქციონალურ-ჭეშმარიტული;
3. კავშირებს და ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებს აქვთ „ლოგიკური აზრი“;
4. არამკაფიო ფენომენი მეტალოგიკურ დონეზე არ არის წარმოდგენილი.

მაშინ როცა პირველი პირობა არ მოითხოვს ნებისმიერ კერძო კომენტარს, ხოლო მეორე პირობა დიდად შეზღუდულია მრავალნიშნა სისტემების შესაძლო ინტერპრეტაციებით. მაგალითად, არ ვიხილავთ ალბათური ინტერპრეტაციების: შეიძლება ჩვენ ვიცოდეთ, რომ A და B მოვლენების ალბათობა ორივეს არის $1/2$ გამოთვლების გარეშე, A და B სტოქასტური დამოუკიდებლობის ინფორმაციის არარსებობის შემთხვევაში, (A და B) ალბათობაა. ანალოგიური მეთოდით, ჭეშმარიტების მნიშვნელობის ინტერპრეტაცია მოდალობების თვალსაზრისით შეკითხვადია. ავიღოთ მაგალითად, ლუკასევიჩის ორიგინალური ინტერპრეტაცია მისი სამნიშნა ლოგიკის შესახებ (იხ. მაგალითი 2.1.2): ჩვენ გვაქვს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები 0, $1/2$, 1, სადაც $1/2$ უნდა იკითხებოდეს როგორც "შესაძლებელი" და ორადგილიანი კავშირი უნდა იკითხებოდეს. როგორც "გამომდინარეობს". ვთქვათ, რომ A არის წინადადება "ხვალ იწვიმებს", ხოლო B წინადადება "რიმანის ჰიპოთეზა დამტკიცდება უახლოეს ათ წელიწადში". ლუკასევიჩის ინტერპრეტაციაში, ეს არის მიზანშეწონილი $1/2$ მნიშვნელობის ორივე A და B-სთვის. ეხლა, მრავალი ჩვენგანი დაგვეთანხმება, რომ მივანიჭოთ მნიშვნელობა 1 ორივე $A \rightarrow A$ და $B \rightarrow B$ -ს, მაგრამ ვიქნებით არაკომფორტული თუ მივანიჭებთ 1-ს $A \rightarrow B$ -ს, როგორც მას მოითხოვს ჭეშმარიტულ ფუნქციონალური ცხრილი.

ჩვენს სიაში მესამე პირობა აშკარად ბუნდოვანია. სინამდვილეში, თუნდაც პირველი პიონერული პერიოდის განმავლობაში მრავალნიშნა ლოგიკა, როდესაც ფილოსოფიური მოსაზრებები წარმართავდა გზას, პოსტის სისტემები მოჰყავდათ მაგალითად სისტემა "ლოგიკური მნიშვნელობის" გარეშე. დღეს, დავა "მნიშვნელობის" შესახებ უფრო მოდუნებულია, და აქცენტი კეთდება სისტემის სასარგებლო თვისებების შესახებ. ასევე, არსებობს ტენდენცია, რომ უგულველბელვყოთ ერთიანი სისტემა, არამედ პირიქით მოვახდინოთ ფორმულირება საერთო თეორიის სისტემის კლასების შესახებ. ჩვენი აზრით, მესამე პირობის აქტივობა ბევრითაა დამოკიდებული საკუთარ გემოვნებაზე. ჩვენ გვაქვს მხოლოდ შენიშვნა, რომ მრავალნიშნა სისტემები შემოიღეს, როგორც კლასიკური, ორნიშნა, ლოგიკის გაფართოებად. უმეტეს ნაწილს მათ აქვთ ღირებულებები, წარმოდგენის "სრულიად ჭეშმარიტი" და "სრულიად მცდარი" და, თუ ჩვენ მხოლოდ ამ მნიშვნელობებით

შემოვიფარგლებით, მივიღებთ ორნიშნა ლოგიკას. თუ ჭეშმარიტული-მნიშვნელობები არიან დალაგებული რაიმე აზრით და კავშირები განკუთვნილია იმისათვის, რომ ორნიშნა ლოგიკასთან პარალელურად, ისინი უნდა იქცეოდნენ გონივრულად. ასე რომ, "კონიუნქცია" კავშირი იქნება იზოტონური ორივე ცვლადში, "იმპლიკაცია" იქნება ანტიტონური პირველი და იზოტონური მეორე ცვლადით, "უარყოფას" იქნება საწინააღმდეგო დალაგება. შეიძლება დავუშვათ მოშორება (3) მთლიანობაში, მაგრამ გადასახდელი ფასი არის დაკარგვა ზოგიერთი მახასიათებლებით დამახასიათებელი არსებული დისციპლინისათვის და გადასვლა უნივერსალურ ალგებრაზე და კომბინატორიკაზე. ამის შესახებ ინფორმაციის მისაღებათ იხილეთ [81, .12.18] გამოცემა და შემდგომი ბმულები.

ჩვენი მეოთხე პირობა მოყვანილია იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ განსხვავება მრავალნიშნა ლოგიკასა და ფაზი ლოგიკას შორის. რადგან ორივე ამ ლოგიკას აქვს შესაბამისად არამკაფიო საზღვრები, ეს არ არის ადვილი გასაკეთებელი, მაგრამ ჩვენ დავსვათ შეკითხვა შემდეგი სახით. ფაზი ლოგიკა ფართო აზრით არის ყველაფერი, რაც ეხება არამკაფიოობას. ვიწრო აზრით, ეს არის ფორმალური ლოგიკური აღრიცხვა არამკაფიოობისა. ჩვენ უნდა განვასხვავოთ შემთხვევები, როდესაც არამკაფიოობა მონაწილეობს ლოგიკურ დონეზე (განგარიშების დონე და მისი სემანტიკა) შემთხვევისგან, როდესაც ფაზი მონაწილეობს მეტალოგიკურ დონეზე (აღრიცხვის გარეშე დონე და მისი სემანტიკა). მაგალითად, ჩვენ შეიძლება გვქონდეს ფაზი გამონათქვამი A, რომელიც არის T თეორიის აქსიომა მკაფიო გზით (მაგ., A მიეკუთვნება T- ს აქსიომურ შემადგენლობას წევრობის ხარისხით 1), ან მკაფიო განცხადება B, რომელიც T- ს აქსიომა ფაზი აზრით (მაგ., B არის აქსიომა, წევრობის ხარისხით = 0, 1), ან ნებისმიერი შესაძლო კომბინაციიდან. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ ვანსხვავებთ ჭეშმარიტებასა და მოსალოდნელობას. იფიქრე ადამიანზე რომელიც ნაჩვენებია სურათზე: შეიძლება სურათი აღმოჩნდეს ფოკუსის მიღმა ხოლო ადამიანის ხელი ფოკუსში. შეიძლება ჰქონდეს ადგილი ეფექტების ყოველა კომბინაციას და მნიშვნელოვანია იმის გაგება, თუ საიდან წარმოიქმნება ეფექტები ფოკუსის გარეთ. მრავალნიშნა ლოგიკაში, ხელი ყოველთვის მდგრადია: არავითარი ბუნდოვნება არ არის მოსალოდნელი მეტალოგიკურ დონეზე და იყოს მოსალოდნელი, მხოლოდ თუ ეს პრედიკატული რეალიზაციაა სიმბოლოთა სტრუქტურაში (იხ. .62.6). ჩვენ დავუბრუნდებით ამ და მასთან დაკავშირებულ კითხვებს ბოლო ნაწილში.

1.2 როგორ არის ორგანიზებული ეს კვლევები

ბოლო წლების განმავლობაში, კომპიუტერული მეცნიერების გამოყენების გამო, მრავალნიშნა ლოგიკამ გამოიწვია ახალი ინტერესი. საკმაოდ გაიზარდა ლიტერატურა. მრავალნიშნა სისტემები ეხლა გამოიყენება ისეთ სფეროებში, როგორიცაა სქემების შემოწმება [42], კავშირის ანალიზი საწინააღმდეგო კავშირით [67], [68], პროგრამირების ლოგიკა [28], [20], [29], ხელოვნური ინტელექტი [33], პროგრამის შემოწმება [9], არამონოტონური მსჯელობა [94], [23], [91], ბუნებრივი ენის დამუშავება [8], [88].

ჩვენ გადავწყვიტეთ, მიგვეცა ძირითადი განსაზღვრებები გამონათქვამთა დონეზე და გამოგვეხატა გაფართოება პრედიკატულ შემთხვევაში სხვადასხვა თავში (§2.6). შინაარსობრივად, ჩვენ ვგრძნობთ, რომ მთავარი აზრი და პრობლემები შეგვიძლია უკეთ გავიგოთ გამონათქვამთა დონეზე. უფრო მეტიც, ჩვენ მთლიანად გამოვტოვეთ ზოგიერთი კითხვები, რომლებიც განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევენ და განიხილება ლიტერატურაში. კერძოდ, ჩვენ გამოვტოვეთ მრავალნიშნა ლოგიკის გამოყენება, რომ დავამტკიცოთ აქსიომების დამოუკიდებლობა ორნიშნა ლოგიკაში [17], [36] და მცდელობები მრავალნიშნა ფორმულირების აქსიომების სქემის გაგების თეორიული შერჩევის (იხ. [104, §2.14], [113]). ასევე, ჩვენ არ განვიხილავთ მრავალნიშნა მოდალურ ლოგიკას; იხ. [30], [31], [102], [100], [73], [86], [63].

2 ზოგადი თეორია

ენა L მრავალნიშნა ლოგიკისათვის:

1. სასრულია ან თვლადი $p, q, r, \dots$ პროპოზიციული სიმბოლოები;
2. სასრული სიმრავლე $c_1, \dots, c_m$, ლოგიკური კავშირების სადაც c_i არის $u_i \geq 0$ ადგილიანი.

$F ORM(L)$ არის L -ის ფორმულების სიმრავლე. ნებისმიერი პროპოზიციული ცვლადი არის ფორმულა, თუ c არის u ადგილიანი კავშირი და $A_1, \dots, A_u$ – ფორმულებია, მაშინ $cA_1, \dots, A_u$ არის ფორმულა.

გამოიყენება ასევე სიმბოლოების მარცხენა და მარჯვენა ფრჩხილი $()$. კავშირები ყველაზე ხშირად ორ ადგილიანია: $\rightarrow p \rightarrow qp$ ჩავწერთ შემდეგნაირად $p \rightarrow (q \rightarrow p)$. ჩვენ ვიყენებთ სიმბოლოებს $A, B, C, \dots$ ფორმულების აღნიშვნისთვის, ხოლო $\Gamma, \Delta, \dots$ ფორმოლების ნა სიმრავლისათვის.

ლოგიკური მატრიცა L -თვის არის სისტემა $M = (M, D)$, სადაც D არის M -ის ქვესიმრავლე. M -ის ელემენტები განხილულია, როგორც ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები, ხოლო D არის მონიშნული ელემენტები ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებიდან. ნულ ადგილიანი კავშირი არის ლოგიკური კონსტანტა, ანუ M -ის ელემენტი. $(M, c_1, \dots, c_m)$ ვგულისხმობთ, რომ c_i არის M -ის ოპერაცია. შეგვიძლია ვიგულისხმობთ, რომ M -ს აქვს 2-ზე მეტი სიმძლავრე.

2.1 სემანტიკა

სტრუქტურა (L, M) ეწოდება ასახვას $\sigma : V \rightarrow M$, პროპოზიციული სიმბოლოების სიმრავლიდან M ალგებრაში, რომელიც შეიძლება გაფართოვდეს $\sigma : F ORM(L) \rightarrow M$.

თუ Γ არის $F ORM(L)$ -ის ქვესიმრავლე და A არის რაღაც ფორმულა, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ A სემანტიკურად გამომდინარეობს Γ -დან M -ის მიმართ, ვწერთ $\Gamma \models_M A$ თუ სრულდება პირობები:

ნებისმიერი σ ასახვისათვის (L, M) -დან, თუ $\sigma(B) \in D$ ნებისმიერი B -თვის $B \in \Gamma$ -დან, მაშინ $\sigma(A) \in D$.

აღნიშვნების გასამარტივებად ჩვენ ვწერთ $B_1, \dots, B_r \models_M A$ რომ არ დავწეროთ $\{\sigma(B_1), \dots, \sigma(B_r)\} \models_M A$. ვიტყვით, რომ A არის ჭეშმარიტი, თუ $\models_M A$, და ვიტყვით, რომ A შესრულებადია, თუ არსებობს σ სტრუქტურა $\sigma(A) \in D$. თუ M არის სასრული მატრიცა (ე.ი. M არის სასრული, n სიმძლავრის), მაშინ გავაიგივებთ M -ს $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ -თან, ან სიმრავლე $I_n = \{0, 1/(n-1), \dots, (n-2)/(n-1), 1\}$, კონტექსტის მიხედვით.

მაგალითი 2.1.1 კლასიკურ ლოგიკაში მატრიცა $B = (2, \{1\})$, სადაც $2 = \{0, 1\}$ არის ორ ელემენტიანი ბულის ალგებრა $(2, V, \neg)$. მაშინ მიმართება $\models_B$ არის ბულის სემანტიკური გამომდინარეობა, და ჭეშმარიტი ფორმულები წარმოადგენენ ბულის ტავტოლოგიებს.

მაგალითი 2.1.2 ლუკასევიჩის სამნიშნა ლოგიკა. ჩვენ გვაქვს ბინარული კავშირი $\rightarrow$ (იმპლიკაცია), და უნარული $\neg$ (უარყოფა). მატრიცა $L_3 = (I_3, \{1\})$ განსაზღვრება შემდეგნაირად:

	$\neg$		$\rightarrow$	0	1/2	1
0	1	0	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1
1	0	1	1	0	1/2	1

განვიხილოთ I_3 როგორც წრფივად დალაგება ($0 < 1/2 < 1$), სადაც 0 არის "სრულიად მცდარი" და 1 "სრულიად ჭეშმარიტი". დავაკვირდეთ, რომ $\rightarrow$, $\neg$, თუ შევზღუდავთ $\{0, 1\}$ სიმრავლეზე ისინი იქცევიან, როგორც კლასიკური ლოგიკის იმპლიკაცია და უარყოფა. გამომდინარეობს, რომ I_3 არ არის ფუნქციონალურად სრული; მაგალითად, არც ერთი ტერმი ვერ აიგება $\rightarrow$ და $\neg$ რომელიც წარმოადგენს ფუნქციას: I_3 დან I_3 -ში რომლის მნიშვნელობა უდრის კონსტანტა $1/2$ -ს.

განმარტება 2.1.3 C არის გამომდინარეობის ოპერატორი $C : P(\text{FORM}(L)) \rightarrow P(\text{FORM}(L))$ თუ სრულდება:

1. $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$;
2. $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$;
3. $\Gamma \subseteq \Delta$ გამომდინარეობს, რომ $C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$.

Γ არის არაწინააღმდეგობრივი, თუ $C(\Gamma) \neq \text{FORM}(L)$:

- სტრუქტურულია, თუ, ნებისმიერი ჩასმის ოპერაციით α ფორმულებისა, ცვლადებისათვის ჩვენ გვაქვს $\alpha(C(\Gamma)) \subseteq C(\alpha(\Gamma))$;
- კომპაქტურია, თუ $A \in C(\Gamma)$ გამომდინარეობს, რომ არსებობს სასრული ქვესიმრავლე $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ისეთი, რომ $A \in C(\Gamma_0)$;
- ერთგვაროვანია, თუ სრულდება პირობა:

თუ $A \in C(\Gamma \cup \Delta)$, Γ არის არაწინააღმდეგობრივი, და Γ -ს არა აქვს საერთო ცვლადები $\Delta \cup \{A\}$ -თან, მაშინ $A \in C(\Delta)$.

ჩვენ განვსაზღვრეთ ლოგიკა, როგორც წყვილი (L, M) . უფრო ზოგადი მიდგომა იქნებოდა თუ ლოგიკას განვსაზღვრავდით, როგორც წყვილს (L, C) , სადაც L არის ენა, და C არის გამომდინარეობის ოპერაცია $\text{FORM}(L)$ -ზე. სინამდვილეში, ნებისმიერი მატრიცა M -თვის, ასახვა C_M განსაზღვრულია, როგორც

$$C_M(\Gamma) = \{A \in \text{FORM}(L) : \Gamma \models_M A\}$$

არის გამომდინარეობის ოპერაცია. დავუშვათ C არის გამომდინარეობის ოპერაცია. ჩვენ ვამბობთ, რომ M სუსტად ადეკვატური C -სთვის, თუ $C(\emptyset) = C_M(\emptyset)$ და ამბობენ, რომ M ძლიერად ადეკვატური C -სთვის, თუ, ნებისმიერი Γ -თვის, $C(\Gamma) = C_M(\Gamma)$. გამომდინარეობის ოპერაციები, რომლისთვისაც არსებობს მკაცრად ადეკვატური მატრიცა დახასიათებულია ამ ნაშრომებში [54] -ში, [108]. შევნიშნოთ, რომ მკაცრად ადეკვატური მატრიცები შეიძლება იყოს

არათვლადი (იხ. .52.5.2). წიგნი [109] მოცემულია ძირითადი მონაცემები გამომდინარეობის თეორიის შესახებ.

2.2 ზოგიერთი ლოგიკური აღრიცხვები

დავუშვათ, რომ ჩვენ გვაქვს ლოგიკა (L, M) . თუ ჭეშმარიტი ფორმულების სიმრავლე არის რეკურსიულად გადათვლადი, მაშინ ბუნებრივია, რომ ჩვენ გვაქვს საქმე კარგ აღრიცხვასთან. საკუთარი გემოვნების და მოთხოვნების მიხედვით კარგი შეიძლება ნიშნავდეს ელემენტურობას, ეფექტურობას, მარტივად რეალიზებადს, კვეთის გარეშე, კვეთის ელემინაციის გარეშე და სხვა. თუ ჭეშმარიტი ფორმულების სიმრავლე რეკურსიული, მაშინ მოსაძებნია კარგი ამოხსნადობის პროცედურა, მაშინ ცხრილი იძლევა საშუალებას ამოხსნადობის პროცედურის, რომელიც ზოგადად არის არადადამაკმაყოფილებელი, გამოთვლადობის ფასად. მრავალნიშნა ლოგიკისათვის უნდა არსებობდეს იმპლიკაციის კავშირი და ერთი გამოყვანის წესი უნდა იყოს მოდუს პონენსი. თვალსაჩინო გამოთვლებისათვის ეს მიდგომა, ანალიტიკური სისტემებით იყო განვითარებული (ცხრილი და გამომდინარეობის სისტემები), სადაც მატრიცული სემანტიკა არის ახლოს და განსხვავება მონიშნულობის და არამონიშნულობის მნიშვნელობებს შორის კარგავს თავის მნიშვნელობას. მნიშვნელოვანია, რომ სასრულნიშნა აღრიცხვების განვითარებას მივყავართ რაღაც მტკიცებულებასთან და ახალ მიდგომით კლასიკური ლოგიკის ორნიშნა სტრუქტურასთან. ამ თვისების მაგალითად ჩვენ მივმართავთ უნიფიცირებულ მიდგომას მიმდევრობების ბუნებრივ გამოყვანას, ცხრილების აღრიცხვას, რომელიც განვითარებული იყო ბაახის, ფერმიულერის და ზახის მიერ [2], [3], [114].

პრაქტიკულად ყოველი აღრიცხვა ორნიშნა ლოგიკისათვის იყო გავრცელებული მრავალნიშნა სისტემებზე, ყოველ შემთხვევაში სპეციფიკური ლოგიკებისათვის. ჩვენ გვაქვს სხვადასხვა სახის ჰილბერტის სტილის აღრიცხვები, მიმდევრული აღრიცხვები, ნატურალური გამოყვანები, რეზოლუციები, როგორც პროპოზიციულ, ასევე პრედიკატულ დონეზე. ბოლო მტკიცებულებათა სისტემები, როგორც წესი არ არის კონცენტრირებული ერთ ლოგიკაზე, მაგრამ იყო საკმარისად მოქნილი გამოყენებადი ლოგიკის ფართო სპექტრში. ჩვენ მოვიყვანთ ასეთი ტიპის რამდენიმე სისტემას, კერძოდ, სეკვენციურ და ტაბლოს აღრიცხვებს, და რეზოლუციებს. ყველა ისინი არიან ზოგადი მიზნის აღრიცხვები, ანუ, თუ სპეციალიზირებულია ნებისმიერ სასრულ მატრიცაზე, ისინი იძლევიან აღრიცხვებს, რომლებიც არიან თავსებადი და სრული ამ მატრიცების მიმართ. თუ მატრიცა არ არის სასრული, მაშინ აქსიომატიკა უფრო რთულია და ჰილბერტის სტილის სისტემები კვლავ იძენენ მნიშვნელობას. §3 – ში ჩვენ განვიხილავთ ამ საკითხს ერთ კონკრეტულ შემთხვევაზე, კერძოდ, ლუკასევიჩის მრავალნიშნა ლოგიკას.

ჩვენ თავიდან გვჭირდება რამდენიმე განმარტება: დავუშვათ, რომ ჩვენ გვაქვს ფიქსირებული სასრული n სიმძლავრის მატრიცა M . მონიშნული ფორმულა არის ფორმულა L ენაში, მონიშნული ჭეშმარიტების მნიშვნელობებით; მაგალითად, თუ $\rightarrow$ არის ორ ადგილიანი კავშირი L -ში და $M = \{0, 1, 2, 3\}$, მაშინ $(p \rightarrow q)^0$, $(p \rightarrow q)^2$, q^1 წარმოადგენენ სხვადასხვა მონიშნულ ფორმულებს. ლიტერალი არის მონიშნული ფორმულა, სადაც მონიშნული ფორმულა არის პროპოზიციული ფორმულა. მონიშნული ფორმულის გამოსახულება წარმოადგენს მონიშნული ფორმულების ბულის კომბინაციებს $\neg$, $\vee$, $\wedge$ კავშირებით. ნებისმიერი სტრუქტურა σ (L, M) -თვის ინდუცირებს $\bar{\sigma}$ ასახვა, მონიშნული

ფორმულების სიმრავლიდან ორელემენტთან ბულის ალგებრაში, ბუნებრივი განსაზღვრით $\bar{\sigma} (\mathcal{L}^I A^i) = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\sigma(A) = i$. ასახვა $\bar{\sigma}$ ფართოვდება ბუნებრივად ყველა მონიშნული ფორმულების გამოსახულებების სიმრავლეზე. ვიტყვით, რომ მონიშნული ფორმულების გამოსახულებები E, F ეკვივალენტურია და ჩვენ ვწერთ $E \equiv F$, თუ, ნებისმიერი σ – სთვის, გვაქვს $\bar{\sigma}(E) = \bar{\sigma}(F)$. რათქმაუნდა, თუ E, F ეკვივალენტურია როგორც ბულის ფორმულები, მაშინ $E \equiv F$.

ვინაიდან ნებისმიერი ფორმულთვის A და ნებისმიერი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობისთვის i , $\neg(A^i) \equiv \bigvee_{j \neq i} A^j$, აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი მონიშნული ფორმულის გამოსახულებისთვის E , ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვნოთ ეკვივალენტური მონიშნული ფორმულის გამოსახულებით C , რომელიც მოცემულია სრულყოფილ ნორმალურ ფორმაში (CNF) და არ შეიცავს $\neg$ კავშირს. დისტრიბუციული კანონის გამოყენებით C -ზე ჩვენ ვღებულობთ ეკვივალენტური მონიშნული ფორმულის გამოსახულებას D , რომელიც იმყოფება დიზუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში (DNF) და არ აქვს $\neg$. აღსანიშნავია, რომ მოცემული E -სთვის არც C და D არ არის უნიკალური; განხილვისთვის მივუთითებთ [114, §1.5], [40, §4.5]. აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ ჩვეულებრივ ვიყენებთ კომპუტაციურ და ასოციაციურ კანონებს $\vee, \wedge$ -თვის მონიშნული ფორმულის გამოსახულებების CNF და DNF-ში; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ ვთვლით რომ ჩვენ რეალურად ვმუშაობთ კლასების სიმრავლეებზე.

ვთქვათ, რომ c არის u -ადგილიანი კავშირი L -ში, ვთქვათ $p_1, \dots, p_u$ არის პროპოზიციული სიმბოლოები და ვთქვათ i არის ფიქსირებული ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა. ჭეშმარიტობის მნიშვნელობის c -თვის ჭეშმარიტობის ცხრილის განხილვისას, ჩვენ მარტივად შეიძლება ავაგოთ მონიშნული ფორმულის გამოსახულება T , რომელიც შეიცავს მხოლოდ მონიშნულ ფორმულებს $\{p_r^j : 1 \leq r \leq u, j \in M\}$ სიმრავლიდან, და ისეთი, რომ $(cp_1, \dots, p_u)^i \equiv T$. ზემოთ მოყვანილი დაკვირვებით, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ორი (არაუნიკალური) მონიშნული ფორმულები გამოსახულებები C, D ისეთი რომ:

1. C, D არშეიცავს $\neg$;
2. C, D შეიცავს მხოლოდ ლიტერალს სიმრავლიდან $\{p_r^j : 1 \leq r \leq u, j \in M\}$;
3. C არის CNF-ში, და D არის DNF-ში;
4. T, C, D ეკვივალენტურია როგორც, ბულის ფორმულები და, შესაბამისად, ყველა ისინი ეკვივალენტურია $(cp_1, \dots, p_u)^i$.

ჩვენ ვუწოდებთ C -ს i -ური CNF-დან c -თვის, და D -ს i -ურს DNF-დან c -სთვის.

მაგალითი 2.2.1 ვთქვათ c არის ლუკასევიჩისამნიშვნალოვანია. მაშინ:

$$(p \rightarrow q)^0 \equiv p^1 \wedge q^0;$$

$$(p \rightarrow q)^{1/2} \equiv (p^{1/2} \wedge q^0) \vee (p^1 \wedge q^{1/2}) \equiv (p^{1/2} \vee p^1) \wedge (p^{1/2} \vee q^{1/2}) \wedge (q^0 \vee p^1) \wedge (q^0 \vee q^{1/2}) \equiv$$

$$(p^{1/2} \vee q^{1/2}) \wedge (q^0 \vee p^1);$$

$$(p \rightarrow q)^1 \equiv p^0 \vee q^1 \vee (p^{1/2} \wedge q^{1/2}) \equiv (p^0 \vee q^1 \vee p^{1/2}) \wedge (p^0 \vee q^1 \vee q^{1/2}).$$

2.3 პოსტის სისტემები

პოსტმა შემოიყვანა n - ნიშნის სისტემები თავის სადოქტორო დისერტაციაში, რომელიც იყო გამოქვეყნებული [78] -ში. მისი მიდგომა წმინდა ალგებრულია: იგი ანვითარებს თავის ადრიცხვებს, როგორც პირდაპირი განზოგადოება კლასიკური 2-ნიშნის ადრიცხვისა. ის არ იძლევა ლინგვისტიკურ ინტერპრეტაციას მისი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებისა, გარდა ჩვეულებრივი ჭეშმარიტების მნიშვნელობის ტერმინებში, გაანალიზება მონოტონური ელემენტების წარმოდგენისა პოსტის ალგებრაში (იხ. ქვემოთ). 1921 წლის შემდეგ არასდროს არ დაბრუნებულა მრავალნიშნის ლოგიკასთან.

განსაზღვრება 2.3.1 ვთქვათ $n \geq 2$ და ვთქვათ $0 \leq m \leq n - 1$. მატრიცა P_n^m n - ნიშნის პოსტის ლოგიკისათვის განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $P_n^m = (n, \{m, m + 1, \dots, n - 1\})$. არსებობს მხოლოდ ორი კავშირი, $\vee$ და $\sim$, რომლებიც განსაზღვრულია $i \vee j = \max\{i, j\}$, და $\sim i = i - 1 \pmod{n}$. როდესაც ჩვენ არ ვეხებით მონიშნულ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, ჩვენ აღვნიშნავთ მოცემულ ალგებრას $(n, \vee, \sim)$ P_n -ით.

კლასიკური უარყოფა 2-ში შეიძლება განვიხილოთ ან როგორც სარკისებური ასახვა ($i \mapsto 1 - i$), ან როგორც ციკლური ასახვა ($i \mapsto i - 1 \pmod{2}$); ამ ორი გამოსახულების მნიშვნელობა ემთხვევა ერთმანეთს. $n \geq 3$ - ისთვის ისინი აღარ ემთხვევა; პოსტის უარყოფა $\sim$ იღებს მეორე ალტერნატივას.

P_n -ის არსებითი მნიშვნელობა არის ფუნქციონალური სისრულე: ნებისმიერი $k \geq 1$ - ისთვის ნებისმიერი ფუნქცია $f : \mathbf{n}^k \rightarrow \mathbf{n}$ გამოისახება $\vee$ და $\sim$ საშუალებით (კერძოდ, $i \wedge j = \min\{i, j\}$). ეს დაამტკიცა თვითონ პოსტმა; სხვა მტკიცებულება შეიძლება ვნახოთ [104] -ში. ჩვენ გვინდა შემოვიღოთ ყველა ნულალური კავშირი. რათქმაუნდა, საკმარისია შემოვიღოთ კონსტანტა 0-ი. ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ 0 როგორც $p \wedge \sim p \wedge \sim \sim p \wedge \dots \wedge \sim^{n-1} p$, ან შეგვიძლია შემოვიტანოთ 0, როგორც ახალი პრიმიტიული კავშირი. ასე თუ ისე, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ k ფუნქციონალური სისრულის განსაზღვრაში ასევე უნდა იყოს 0-ი. როგორც აბსტრაქტულად, არ აქვს მნიშვნელობა, რომელი კავშირების სიმრავლეს ჩვენ ვუშვებთ როგორც პრიმიტიულს, სანამ ისინი განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე კლასის ფუნქციას, ჩვენ ვეყრდნობით n -ნიშნის პოსტის ლოგიკას ნებისმიერი n -ნიშნის ლოგიკას, რომელიც ფუნქციურად სრულია ($k = 0$ შეიძლება). ჩვენ, აღვნიშნავთ, რომ პრაქტიკული თვალსაზრისით - ვთქვათ, ავტომატური თეორემების მტკიცებულებები - ეს ქმნის დიდ განსხვავებას, რომელ კავშირების სიმრავლეს ჩვენ ვთვლით პრიმიტიულს. პრიმიტიულების ცუდი არჩევანს შეუძლია იმუშაოს სისტემაში არაპრაქტიკულად: არავის არასდროს არ უცდია განესაზღვრა კლასიკური ლოგიკა მხოლოდ შტრიხ შეფერის გამოყენებით.

აღსანიშნავია პოსტის n -ნიშნის ლოგიკის კრეიგის ინტერპოლაციის თეორემა.

ალგებრული თვალსაზრისით დიდი ძალისხმევა იყო დახარჯული პოსტის ალგებრების კლასისთვის. ძირითადი იდეები შემდეგია: ჩვენ გვაქვს P_n შემდეგი ტიპის $(2, 2, 1, 0, 0)$, $(\vee, \wedge, \sim, \perp, \top)$ ენით, $\perp$ და $\top$ განსაზღვრულია როგორც 0 და $n - 1$ შესაბამისად. როგორც აბსტრაქტული ალგებრა, P_n წარმოქმნის ეკვაციურ კლასს, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $\mathbf{P}_n$.

P_n – ის ელემენტებია ყველა ალგებრა, რომელიც იგივე ტიპის როგორიცაა P_n , რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობებს რომლებიც სრულდება P_n –ში . ბირკჰოფის თეორემის თანახმად , P_n არის კლასი P_n -ის ყველა ჰომომორფული ასახვებისა, ყველა ქვეალგებრების და ყველა დეკარტული ნამრავლებისა; P_2 ბულის ალგებრის კლასია.

ჩვენ ახლა ვაშორებთ $\sim$. განმარტებით, n რიგის პოსტის ალგებრების კლასი არის ალგებრების კლასი P_n , არის ალგებრების კლასი, რომლის ელემენტებია P_n -ის ელემენტები, მაგრამ $(\vee, \wedge, \perp, T)$ ენაში. P_n უკვე აღარ არის ეკვაციური კლასი, ვინაიდან იგი არ არის ჩაკეტილი ქვეალგებრისათვის მიმართ. ალგებრა $N \in P_n$ არის დისტრიბუციული შემოსაზღვრული მესერი, და დამატებითი თვისებით: N უხილავად შეიცავს თავის სტრუქტურაში კონსტანტების ჯაჭვს $c_{n-1} = T, c_{n-2} = \sim T, c_{n-3} = \sim \sim T, \dots, c_0 = \sim^{n-1} T = \perp$, მაგრამ მას ის აღარ ახსოვს. შეგვიძლია ჩვენ აღვადგინოთ ეს ჯაჭვი?

გავიხსენოთ, რომ ელემენტ a -ს შემოსაზღვრულ დისტრიბუციულ მესერში გააჩნია დამატება, თუ არსებობს b , ისეთი რომ $a \vee b = T$ და $a \wedge b = \perp$. თუ ასეთი b არსებობს, მაშინ იგი ცალსახად განისაზღვრება; ჩვენ აღვნიშნავთ ამას $\neg a$ -თი. განმარტებით, N მესერის ცენტრი $C(N)$ არის ბულის ალგებრა ყველა მის დამატებითი ელემენტებისა N -დან.

თეორემა 2.3.3 [26] დაუშვავთ $N = (N, \vee, \wedge, \perp, T)$ არის შემოსაზღვრული დისტრიბუციული მესერი. მაშინ N არის n -ნიშნა პოსტის ალგებრა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი შეიცავს ჯაჭვს $\perp = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} = T$ ისეთს, რომ:

ყოველ ელემენტ $a \in N$, რომელიც შეიძლება იყოს ჩაწერილი შემდეგნაირად

$$a = (a_1 \wedge c_1) \vee (a_2 \wedge c_2) \vee \dots \vee (a_{n-1} \wedge c_{n-1}),$$

სადაც $a_1, \dots, a_{n-1} \in C(N)$;

$a \in C(N)$ გარდა $\perp$ და არცერთი $0 \leq i \leq n-2$, არ სრულდება $a \wedge c_{i+1} \leq c_i$.

თუ ჩვენ მოვითხოვეთ, რომ $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1}$, მაშინ a_i ცალსახად განისაზღვრება; ისინი შეადგენენ a -ს მონოტონურ მიმდევრობას. c_i -ების ჯაჭვი, ასევე როგორც ყველა მისი სიგრძე, ცალსახად განისაზღვრება, აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $n \neq m$, P_n და P_m თანაკვეთა ცარიელია.

სიტუაცია ხდება გრძელეული, როგორც კი ცნობილია სტოუნ ეფშტეინის წარმოდგენის თეორემა.

თეორემა 2.3.4 [27] ნებისმიერი n რიგის პოსტის ალგებრა არის იზომორფული ყველა უწყვეტი ფუნქციის მესერისა ცენტრის დუალური სივრციდან - კომპაქტური, სრულად არაბმული, ჰაუსდორფის სივრცე - n - ელემენტიან ჯაჭვში. პირიქით, ნებისმიერი ბულის სივრცე X -სთვის, ყველა უწყვეტი ფუნქციების: $X \rightarrow n$ მესერი არის n რიგის პოსტის ალგებრა.

სპიდის თეორემის თანახმად [90], ეს ტოლფასია იმის, რომ ყოველი n რიგის პოსტის ალგებრა არის კონამრავლი ბულის ალგებრისა -უფრო ზუსტათ, მისი ცენტრისა - n -ელემენტიან ჯაჭვიდან.

ეპშტეინის წარმოდგენაში, კონსტანტა c_i შეესაბამება ფუნქციას, რომელიც იღებს მუდმივ მნიშვნელობას i , მაშინ როცა a_i მონოტონურ წარმოდგენაში a არის მახასიათებელი ფუნქცია სიმრავლე $\{x \in X : a(x) \geq i\}$ -ზე. ასევე ნათელია, რომ მონოტონური წარმოდგენა იძლევა იზომორფიზმს N -დან Q -ს ქვესტრუქტურაზე წარმოდგენილია როგორც $C(N)$ -ების $n - 1$ კოპიების ნამრავლისა. Q ყალიბდება ყველა დადებითი $n - 1$ სიგრძის ელემენტების $C(N)$ -დან მიმდევრობების ალებით. ოპერაციები $\vee, \wedge, \top, \perp$ მოქმედებენ კომპონენტურად, მაშინ როდესაც გადანაცვლება $\sim$ მოცემულია შემდეგნაირად :

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}) \mapsto (a_2 \vee \neg a_1, a_3 \vee \neg a_1, \dots, a_{n-1} \vee \neg a_1, \neg a_1)$$

აღსანიშნავია, რომ 1921 წლის სტატიის ბოლოს, პოსტმა განჭვრიტა ეს ბოლო წარმოდგენა, ინტერპრეტირება მისი მთავარი მნიშვნელობის როგორც მონოტონური მიმდევრობის ჩვეულებრივი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობისა.

2.4 ლუკასევიჩის სისტემები

როგორც ვნახეთ §2.3 -ში პოსტის სისტემები საკმაოდ ხისტია: იმისათვის, რომ გადავიდეთ n -დან m მნიშვნელობაზე, უნდა შეიცვალოს კონსტანტების ჯაჭვი. ლუკასევიჩის სისტემები საკმაოდ მოქნილია; ჩვენ უკვე შევხვდით სამნიშნას მაგალითში 2.1.2 -ში, ეხლა მოვიყვანთ ზოგად სტრუქტურას.

ვთქვათ $n \geq 2$. მატრიცა L_n ლუკასევიჩის n -ნიშნა ლოგიკისათვის არის $L_n = (I_n, \{1\})$, ენაში $(\rightarrow, \neg, 1)$. კონსტანტა 1 უნდა იყოს განმარტებული როგორც ნამდვილი რიცხვში 1, იმ დროს როდესაც $\rightarrow$ და $\neg$ განსაზღვრულია როგორც: $i \rightarrow j = \min\{1 - i + j, 1\}$, $\neg i = 1 - i$. თუ შევცვლით I_n -ს ნამდვილი ერთეულოვანი ინტერვალით $I = [0, 1]$, კავშირებში ცვლილებების გარეშე, ჩვენ ვიღებთ მატრიცას $L = (I, \{1\})$ ლუკასევიჩის უსასრულო ლოგიკისათვის.

ჩვენ წარმოგიდგენთ შემდეგ კავშირებს:

$$\begin{aligned} 0 &= \neg 1 \\ i \oplus j &= (\neg i) \rightarrow j \\ i \otimes j &= \neg((\neg i) \oplus (\neg j)) \\ i \vee j &= (i \rightarrow j) \rightarrow j \\ i \wedge j &= \neg((\neg i) \vee (\neg j)) \\ i \leftrightarrow j &= (i \rightarrow j) \wedge (j \rightarrow i) \end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ:

- $\oplus, \otimes, \vee, \wedge$ ყველა ასოციაციურია და კომუტაციური;
- $\vee$ და $\wedge$ შეესაბამება მაქსიმუმს და მინიმუმს;

- $i_1 \oplus \dots \oplus i_t = \min\{i_1 + \dots + i_t, 1\}$;
- $i_1 \otimes \dots \otimes i_t = \max\{i_1 + \dots + i_t - t + 1, 0\}$;
- $i \leftrightarrow j = (i \rightarrow j) \otimes (j \rightarrow i) = 1 - |i - j|$;
- თუ შეზღუდულია $\{0, 1\}$ -ში კავშირები $\rightarrow, \neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow$ იქცევიან როგორც ბულის შემთხვევაში, იმ დროს როდესაც $\oplus$ და $\otimes$ ემთხვევა $\vee$ და $\wedge$;
- შეუღლება ($i \leq j \rightarrow k$ მმ $i \otimes j \leq k$) შესრულებულია;
- კავშირების სიმრავლე ($\rightarrow, \neg, 1$), ($\rightarrow, 0$), ($\oplus, \otimes, \neg, 0, 1$) ურთიერთ განსაზღვრულია.

ლიტერატურაში ლუკასევიჩის ლოგიკა ყოველთვის იყო მნიშვნელოვანი. უდავოდ, ტრადიციამ ითამაშა თავისი როლი: ლუკასევიჩის ლოგიკა იყო პირველი მრავალნიშნა ლოგიკა, რომელიც იყო შემოთავაზებული და სისტემატიურად განხილული [55], [56]. ახლახანს, ფაზი ლოგიკის განვითარებით წარმოიქმნა ახალი მოტივაციები. ნამდვილად, სამართლიანად ჩანს, რომ ლოგიკა, რომელიც ისახავს მიზნად ნებისმიერი ფორმალიზებული გამოყვანის მექანიზმის აღჭურვილი უნდა იყოს "ნამრავლის" კავშირით $\otimes$ და "იმპლიკაციით" $\rightarrow$, დაკავშირებული შეუღლების პირობით. [22] და [77] თანახმად, ჩვენ განვსაზღვრავთ რეზიდუალურ მესრს, რომ გქონდეს სტრუქტურა $(L, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, \perp, T)$ ისეთი, რომ:

- $(L, \vee, \wedge, \perp, T)$ არის მესერი უმცირესი და უდიდესი ელემენტებით;
- $(L, \otimes, T)$ არის კომუტაციური მონოიდი;
- შესრულებულია შეუღლების პირობა, ე.ი ნებისმიერი $i, j, k \in L$ - სთვის, ჩვენ გვაქვს $i \leq j \rightarrow k$ მმ $i \otimes j \leq k$.

თუ, გარდა ამისა, L არის სრული, როგორც მესერი, ჩვენ ვამბობთ, რომ $(L, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, \perp, T)$ არის სრული რეზიდუალური მესერი.

თეორემა 2.4.1 [77, გვ. 121-122] ვთქვათ $(L, \vee, \wedge, \perp, T)$ იყოს სრული მესერი.

1. ვთქვათ $\otimes$ იყოს ბინარული ოპერაცია (არ არის აუცილებელი კომუტაცურობა) L -ზე ისეთნაირად, რომ:

- $\otimes$ არის იზოტონური ორივე ცვლადის მიმართ (ე.ი.თუ $i \leq j$, მაშინ $i \otimes k \leq j \otimes k$ და $k \otimes i \leq k \otimes j$);
- თითოეული I ქვესიმრავლისთვის L -დან, $(\bigvee_{i \in I} i) \otimes j = \bigvee_{i \in I} (i \otimes j)$.

მაშინ არსებობს ერთადერთი ოპერაცია $\rightarrow$ L -ზე, ისეთი რომ შეუღლების პირობა სრულდება წყვილისთვის $(\otimes, \rightarrow)$; ეს ოპერაცია მოცემულია შემდეგნაირად $j \rightarrow k = \bigvee\{i : i \otimes j \leq k\}$.

2. ვთქვათ $\rightarrow$ იყოს ბინარული ოპერაცია L -ზე ისეთი, რომ:

- $\rightarrow$ არის ანტიტონური პირველ ცვლადის მიმართ და იზოტონური მეორე ცვლადის მიმართ;

d. ყოველი K ქვესიმრავლისათვის L -დან $j \rightarrow (\bigwedge_{k \in K} k) = \bigwedge_{k \in K} (j \rightarrow k)$. მაშინ არსებობს ერთადერთი ოპერაცია $\otimes$ L -ზე, ისეთნაირი, რომ შეუღლების პირობა სრულდება წყვილისათვის $(\otimes, \rightarrow)$; ეს ოპერაცია მოცემულია შემდეგნაირად $i \otimes j = \bigwedge \{k: i \leq j \rightarrow k\}$.

3. ყოველ სრულ რეზიდუალურ მესერში სრულდება პირობები (a), (b), (c), (d).

მაგალითი 2.4.2 განვიხილოთ ჩვეულებრივი მესერის სტრუქტურა ნამდვილი ინტერვალის $I = [0, 1]$. როგორც დამტკიცებულია [77, გვ. 123]-ში და მათში მითითებული ლიტერატურა, I შეიძლება მოცემულ იქნას 2^X სხვადასხვა რეზიდუალური მესერის სტრუქტურით, რომელშიც ნამრავლის ოპერაცია არის უწყვეტი.

ავიღოთ $\otimes = \wedge$. მაშინ $\rightarrow$ არის განსაზღვრული:

$$i \rightarrow j = \begin{cases} i, & \text{თუ } i \leq j; \\ j, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

ვიღებთ ჰეიტინგის სრულ ალგებრას. ეს არის გოედელის ლოგიკის შემთხვევა; იხილეთ §2.5.2.

ვთქვათ $\otimes$ -ის ჩვეულებრივი ნამრავლი ნამდვილ რიცხვებში. მაშინ ჩვენ ვიღებთ:

$$i \rightarrow j = \begin{cases} i, & \text{თუ } i \leq j; \\ j/i, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

ნამრავლის ლოგიკის შემთხვევა იხილეთ [44] გვერდზე.

3. ლუკასევიჩის ნამრავლი $i \otimes j = (i + j - 1) \vee 0$ გვაძლევს ლუკასევიჩის იმპლიკაციის $i \rightarrow j = (1 - i + j) \wedge 1$.

ეს სამი მაგალითი გარკვეული აზრით არის ამომწურავი; მართლაც, ყოველი უწყვეტი t -ნორმა (იხ. ნოვაკის თავი ნამდვილი სახელმძღვანელო) შეგვიძლია მივიღოთ მათგან [76].

თეორემა 2.4.3 [60] ვთქვათ $(I, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ რეზიდუალური მესერია, რომელშიც $\vee$ და $\wedge$ არის ჩვეულებრივი მაქსიმუმი და მინიმუმი. დაუშვათ, რომ $\rightarrow: I^2 \rightarrow I$ არის უწყვეტი. მაშინ $\otimes$ და $\rightarrow$ არის ლუკასევიჩის ნამრავლი და იმპლიკაცია.

ზემოთ მოყვანილი თეორემა კიდევ უფრო გასაოცარია, თუ ის ჩათვლის, რომ 56 წლები გამოყოფილია [55] და [60]. მაგრამ, ის უნდა იყოს საკმარისი რომ დავასაბუთოდ ლუკასევიჩის ლოგიკის კვლევები. სინამდვილეში, პაველკამ დაამტკიცა [77]-ში, რომ ლუკასევიჩის კავშირები უზრუნველყოფს თავის მხრივ უნიკალურობას დამოკიდებული სისრულის თეორემაში ფაზი ლოგიკის კონტექსტში.

ეს მოსაზრებები დღეს არის შედარებით; ლუკასევიჩის ლოგიკა წარმოიშვა, არა ისე როგორც რეზიდუალური მესერის ლოგიკა, არამედ როგორც ლოგიკა განსაზღვრული მატრიცების სემანტიკით. როგორ შეგვიძლია აქსიომატიზირება $C_L(\emptyset)$ ყველა ფორმულათა სიმრავლე, რომელიც ჭეშმარიტია L -ში? ლუკასევიჩის ჰიპოტეზა, რომ შემდეგი ოთხი აქსიომატა სქემა, მოდუს პონენსთან ერთად, შემდეგია:

Ax1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
 Ax2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;
 Ax3. $(\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
 Ax4. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$.

(სინამდვილეში, მას ასევე აქვს $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$, როგორც მეხუთე აქსიომა; ეს დამტკიცებული იყო ჩანგის და მერედიტის მიერ). 1935 წელს ვაისბერგი ამტკიცებდა, რომ აქვს ჰიპოთეზის მტკიცებულება, მაგრამ მას ის არ გამოუქვეყნებია. 1958 წელს როუზმა და როსერმა [82] მისცეს პირველი გამოქვეყნებული მტკიცებულება; სხვა მტკიცებულებები იქნა მიღებული ჩანგის [16], სინიოლის [18], და პანტის [75] მიერ. ჩვენ დავუბრუნდებით შეკითხვას სისრულის შესახებ §3-ში.

აქსიომები Ax1–Ax4 საკმაოდ ელეგანტურია. თუ მათ დავამატებთ

Ax5. $(\neg \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$;

ჩვენ ვიღებთ ჰილბერტ-აკერმანის აქსიომატიზაციის შემთხვევას ორნიშნა აღრიცხვაში. თუ ჩვენ დავამატებთ

Ax5'. $((\alpha \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$;

ვიღებთ აქსიომატიზაციას ლუკასევიჩის სამნიშნა აღრიცხვაში; ორივე შემთხვევაში Ax4 ხდება ზედმეტი და შეიძლება იყოს მოშორებული,

Ax5 გამოიხატავს $\oplus$ -ს იდემპოტენტურობას; სინამდვილეში, ეს შეიძლება იყოს ექვივალენტურად ფორმულირებული, როგორც $\alpha \oplus \alpha \rightarrow \alpha$ ($\alpha \rightarrow \alpha \oplus \alpha$ გამოიყვანება Ax1 – Ax4– დან). Ax1 – Ax5– ის საშუალებით, $\oplus$ და $\vee$ უქმდება და ასევე $\otimes$ და $\wedge$. $n \geq 3$ -ისთვის აქსიომა, რომელიც პარალელურია Ax5-ისა არის

$$\text{Ax5''}. \underbrace{\alpha \oplus \alpha \oplus \dots \oplus \alpha}_{n \text{ summands}} \rightarrow \underbrace{\alpha \oplus \dots \oplus \alpha}_{n-1 \text{ summands}}.$$

$n = 3$ -ისთვის ეს საკმარისია (ე.ი. Ax1 – Ax3, Ax5' ექვივალენტურია Ax1 – Ax4, Ax5'' და აქსიომიზირებს $C_{L_3}(\emptyset)$), მაგრამ $n \geq 4$ -ისთვის ჩვენ შემდგომში გვჭირდება ახალი აქსიომების მთელი ჯგუფი, ხოლო კერძოდ

$$\text{Ax6j}. (n-1) \underbrace{(\alpha \oplus \alpha \oplus \dots \oplus \alpha)}_{j \text{ summands}} \rightarrow (\alpha \otimes \underbrace{(\alpha \oplus \dots \oplus \alpha)}_{j-1 \text{ summands}});$$

(იხ. [37]). აქ $(n-1) \beta$ აღნიშნავს $\beta \oplus \dots \oplus \beta$ ($n-1$ ჯერ), მაშინ როდესაც j განისაზღვრება სიმრავლით $\{k: 1 < k < n-1 \text{ და } k \text{ არყოფს } n-1\}$.

რჩება ლოგიკის „ენობრივი“ ინტერპრეტაციის ღია პრობლემა. ყველაზე დამაინტრიგებელი კავშირი არის შემოსაზღვრული ჯამი $\oplus$. იმისათვის რომ გამოვთვალოთ $i \oplus j$, ჯამი i და j , არის ნამდვილი რიცხვები: თუ შედეგი ნაკლებია ან ტოლია 1-ის, წინააღმდეგ შემთხვევაში 1. არის თუ არა სიტუაცია რეალურ ცხოვრებაში, რომელშიც ჩვენ ვმოქმედებთ წინადადებით შემოსაზღვრული ჯამი? [87]–ში სკოტი ვარაუდობს, რომ შეცდომის ხარისხი შეიძლება ჩაითვალოს ადიციურად. ასე რომ, თუ A სამართლიანია შეცდომის ხარისხით i და B ჭეშმარიტია შეცდომის ხარისხით j ($i, j \in [0, 1]$), მაშინ $(A \text{ და } B)$ უნდა იყოს ჭეშმარიტი შეცდომის ხარისხით $\min\{i + j, 1\}$ (შეცდომის ხარისხი მეტია 1-ზე, ე.ი. სრული მცდარობა, რატომ უნდა შეიძლება იყოს შემცირებული 1-მდე). მაგრამ A ჭეშმარიტია შეცდომის ხარისხით i , სტრუქტურა σ ნიშნავს $\sigma(A) = 1 - i$. აქედან გამომდინარე

ჩვენ გვაქვს:

$$\begin{aligned}\sigma(A \text{ and } B) &= 1 - ((i + j) \wedge 1) \\ &= 1 + ((-i - j) \vee -1) \\ &= (1 - i - j) \vee 0 \\ &= (1 - i + 1 - j - 1) \vee 0 \\ &= (\sigma(A) + \sigma(B) - 1) \vee 0 \\ &= \sigma(A) \otimes \sigma(B)\end{aligned}$$

ეს ნამდვილად ის არის რაც ჩვენ გვინდოდა; შეუღლების პირობა გვაძლევს განსაზღვრებას
→.

როგორც ნამრავლის შემთხვევაში, ჩვენ გვაქვს კონიუნქციის არაიდენპოტენტურობა: ჩვენ უნდა მივიღოთ ეს, თუ A ჭეშმარიტია, შეცდომის ხარისხით, ვთქვათ, $2/3$, მაშინ $(A \text{ და } A)$ ჭეშმარიტია შეცდომის ხარისხით $(2/3) \otimes (2/3) = 1/3$. ჩვენ დავუბრუნდებით სკოტის ინტერპრეტაციას ამ კვლევების შემაჯამებელ ნაწილში; ამავე დროს მიუთითებთ სკოტს და სმაილის დისკუსიას [87] -ში, ასევე ურქარტს [104]-ში. ჩვენ ასევე ვეყრდნობით [87]-ს გილსის ინტერპრეტაციას ლუკასევიჩის ლოგიკისთვის, როგორც "რისკისა და ვალდებულების ლოგიკისთვის". ჩვენ აგრეთვე აღვნიშნავთ, რომ "და"-ს არაიდენპოტენტურობა არც ისე შოკისმომგვრელია: შეიძლება ვიფიქროთ ორ განსხვავებულ ცდაზე ერთსა და იმავე საკითხზე. ეს არც ისე შორია, მაგ., წრფივი ლოგიკა.

[67] -ში მუნდიჩი გვთავაზობს ლუკასევიჩის ლოგიკის ინტერპრეტაციას ულამის თამაშების ტერმინებში სიცრუებითურთ. სიტუაცია ასეთია: პასუხის გამცემი ირჩევს რიცხვს 0 -დან k -მდე. მკითხველი სვამს კი-არა კითხვას. პასუხის გამცემელს უფლება აქვს n იცრუოს. რამდენი კითხვას ჭირდება მკითხველს რომ იპოვოს რიცხვი? ამ კონტექსტში არ სრულდება არც არაწინააღმდეგობრიობის და არც იდეპოტენტურობის პრინციპი. თუ პასუხის გამცემი თავიდან ამბობს "რიცხვს 7 -ს", და შემდეგ კი "რიცხვი არ არის 7 ", ეს არ იწვევს არაწინააღმდეგობრიობას: ეს უბრალოდ ნიშნავს, რომ პასუხის გამცემელს აქვს ერთზე ნაკლები სიცრუე. ანალოგიურად, ასევე მტკიცებულების განმეორება იმის შესახებ, რომ "რიცხვი ტოლია 7 -ის" არის უფროინფორმატიული, ვიდრე ერთი მტკიცებულება; $n + 1$ მტკიცებულება ჭეშმარიტობის გარანტია. მუნდიჩი აჩვენებს, რომ თამაშის თითოეულ ეტაპზე არის ორივე კითხვის ცოდნის მდგომარეობა და მტკიცებულება და პასუხის გამცემის მტკიცებულება შეიძლება იყოს გამოსახული ფორმულით ლუკასევიჩის $k + 2$ ნიშნა ლოგიკაში. შემკითხველის შემდგომი ცოდნის მდგომარეობა მოცემულია ლუკასევიჩის ორი ფორმულის კონიუნქციით. სიტუაცია შეიძლება განზოგადდეს სიცრუის უსასრულო რაოდენობის დაშვებით, ან შემთხვევითი სიცრუით. შემკითხველის ადაპტირების სტრატეგია, ბუნებრივად, მიყვავართ შეცდომების გამოსწორებით კოდების თეორიამდე; ჩვენ მიუთითებთ [67], [68] შემდგომი ცნობებისთვის.

არსებობს ორი სიტუაცია, როცა შემოსაზღვრული ჯამი ბუნებრივად წარმოიქმნება; მე პირველ რიგში სტეფანის მაღლობელი ვარ, რომ ამისათვის მიმეჭვია ყურადღებ. პირველი სიტუაცია გაჯერებული ლოგიკურ სქემაში. არსებობს ლოგიკური სქემები, რომლებიც გვიბრუნდება როგორც გამოსავალი ძაბვის ჯამს, რომლებიც მიიღებიან, როგორც შესავალი; თვითონ ძაბვები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ჭეშმარიტების მნიშვნელობები. როგორც ყველა რეალური ელექტრონული კომპონენტი, ამ ლოგიკურ სქემებს აქვთ

გაჯერების დონე, რომელზეც მეტი ან გამოსავალი არ მატულობს, ან ლოგიკური სქემა მოკლე ჩართვაა.

მეორე სიტუაცია, თუ დავამატებთ ფიქსირებულ წერტილს კომპიუტერებში. ფიქსირებული წერტილის დამატება ეს არის დამატება $\text{mod } 2^{32}$, ან $\text{mod } 2^{64}$, რომელიც დამოკიდებულია კომპიუტერზე. ის იყენებს ნაკლებ რესურს ვიდრე დამატება მცურავი წერტილის, მაგრამ ის ექვემდებარება გადიდებას. ვინაიდან გადიდება იწვევს ავარიას, შეგვიძლია შევეცადოთ შევზღუდოთ გაფუჭება ყოველთვის შედეგის შეცვლით პოტენციალურად სახიფათო გამოსახვადი მაქსიმალური რიცხვის ($2^{32} - 1$, ან $2^{64} - 1$) დამატებით.

2.5.1 ბოჩვარისა და კლინის სისტემები

ბოჩვარისა და კლინის ორივე სამნიშნა სისტემებია. 0 და 1-ის გარდა, რომლებიც აღნიშნავენ მცდარობას და ჭეშმარიტობას, მათ აქვთ მესამე მნიშვნელობა 2. იმ დროს როდესაც ლუკასევიჩის მესამე მნიშვნელობა აღნიშნავს შესაძლებლობას ან ჯერ კიდევ განუსაზღვრელს, ბოჩვარის თვალსაზრისით იგი პარადოქსულია, ან უაზრობაა. ნებისმიერი რთული წინადადება, რომელიც მოიცავს თავის თავში უაზრო ნაწილს, თვითონ არის უაზრო, და, მაშასადამე, გვაქვს ჭეშმარიტობის ცხრილები

		¬		
	0	1		
	1	0		
	2	2		
∧	0	0	0	2
	1	0	1	2
	2	2	2	2

		∨		
	0	1	2	
	0	0	1	2
	1	1	1	2
	2	2	2	2
→	0	1	1	2
	1	0	1	2
	2	2	2	2

ბოჩვარის სისტემები იყო შემოთავაზებული [11]-ში, როგორც გზა ავიცილოთ ლოგიკური პარადოქსები, კერძოდ, რასელის პარადოქსი. უფრო ღრმა ანალიზი და დამატებითი ცნობები მოყვანილია [81, §2.4]-ში და [104, §1.6]-ში.

[51], [52] -ში, კლინი განიხილავს მნიშვნელობა 2-ს როგორც განუზღვრელობას, იგივე აზრით, როგორც ტიურინგის მანქანა, რომელიც არჩერდება კონკრეტულ შესავალზე, შეგვიძლია განვიხილოთ, რომელიც იძლევა განუსაზღვრელ შედეგს. ორი თვალსაზრისია შესაძლებელი. პირველი შესაძლებლობა: ითვლება, რომ განუსაზღვრელი ნაწილობრივი გამომავალი ქმნის ყველა გაანგარიშებებს გლობალურად განუსაზღვრელს. ამ გაგებით, ვღებულობთ ბოჩვარის ჭეშმარიტობის ცხრილს: კლინი უწოდებს "სუსტკავშირებს" ამ გზით განსაზღვრულ კავშირებს. მეორე შესაძლებლობა: ვღებულობთ, რომ გამოთვლებმა შეიძლება მიიღოს გლობალური მნიშვნელობა, თუნდაც ზოგიერთ ქვეგამოთვლებში გლობალური განუზღვრელობაა. ამ შემთხვევაში, კლინის შემოთავაზება, რომელსაც ის უწოდებს "ძლიერ კავშირებს".

$$\begin{array}{c|ccc} \vee & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \rightarrow & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

2.5.2 გეოდელოს სისტემა

$$i \rightarrow j = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq j; \\ j, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \neg i = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

განვიხილოთ ზოგიერთ აქსიომატიზაციას პროპოზიციული აღრიცხვისათვის IPC, როგორიცაა კლინის [52]

ნებისმიერი თეორემა IPC სამართლიანია ყველა G_n -ში და ასევე G -ში. მეორეს მხრივ, გეოდელმა დაამტკიცა [34]-ში, რომ არცერთი სასრული მატრიცა არ არის ზუსტად ადეკვატური, ოპერაციისათვის C_{IPC} (C_{IPC} განისაზღვრება შემდეგნაირად: $A \in C_{IPC}(\Gamma)$ მმ A გამოიყვანება Γ – დან $Ax1 - Ax10$ – ით და მოდუს პონენსის საშუალებით). გეოდელის მტკიცებულებად ასევე შეიძლება იყოს სავარჯიშო [17, გვ. 145]-ში. [24] -ში და მეტი ახასიათებს ფორმულების სიმრავლეს ჭეშმარიტული G -ში

(ექვივალენტურია, ყველა G_n - ში), როგორც ფორმულების სიმრავლე მიღებული $Ax1 - Ax11$ – იდან, სადაც $Ax11$ არის აქსიომის სქემა, რომელიც გამოხატავს წრფივობას:

$Ax11. (\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha).$

[48]-ში, იასკოვსკი აგებს მატრიცების უსასრულო ოჯახს, რომლის შესაბამისი სიმრავლე ჭეშმარიტი ფორმულებისა, რომელიც მიისწრაფის $C_{IPC}(\emptyset)$ -სკენ. ეს არის კლასიკური მაგალითი საინტერესო ფენომენისა: ბევრი სასრულად აქსიომატიზირებადი პროპოზიციული ლოგიკები შეიძლება იყოს აპროქსიმირებადი სასრულნიშნა ლოგიკების მიმდევრობებით(იხ. [4]). იასკოვსკი აგებს ასევე უსასრულო მატრიცას (განსხვავებული IPC- ის ლინდენბაუმის ალგებრისგან), რომლის ჭეშმარიტი ფორმულების სიმრავლე ემთხვევა ინტუიციონალური ლოგიკის თეორემებს.

ჩვენ აღვნიშნავთ, რომ ვრონსკის შედეგი[112], არცერთი არსებული მატრიცა არ არის მკაცრად ადეკვატური C_{IPC} -თვის.

2.5.3 ბელნაპის სისტემა

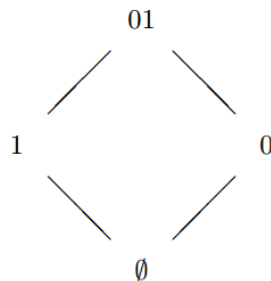
ბელნაპის ლოგიკა არის ოთხნიშნა არაწრფივად დალაგებული ლოგიკა [6], [49]. იგი განკუთვნილია არასრული ცოდნის გადაწყვეტისათვის და შესაძლოა წინააღმდეგობრივი ცოდნაზე დაფუძნებულს. დავუშვათ, კომპიუტერი განკუთვნილია განხილვისათვის საფუძვლიანი ფაქტების შესახებ. დავუშვათ, რომ იგი ინფორმირებს ჭეშმარიტობაზე ან მცდარობაზე ამ ფაქტების შესახებ სხვადასხვა აგენტებისგან, თითოეული მათგანი გლობალურად დამაჯერებელია, მაგრამ ზოგჯერ არასწორია რაიმე კონკრეტულ შემთხვევაში. შეიძლება მოხდეს ისე, რომ კომპიუტერს ჯერ ეუბნებიან, რომ ფაქტი p არის ჭეშმარიტი, შემდეგ რომ ის არის მცდარი; ამ სახის წინააღმდეგობა გავრცელებულია ჩვენს ყოველდღიურ ცხოვრებაში. სრულყოფილი ბულისებური მსჯელობა, როდესაც წინააღმდეგობა ხვდება, იშლება და იწყებს გამოტანას როგორც ახალი თეორემისა ყოველი მტკიცებულებისთვის, რომლის შესახებ იგი შეიძლება ფიქრობდეს; რათქმაუნდა, ეს არ არის ის, რასაც ჩვენ ვაკეთებთ და არც ის, რაც გვინდა ჩვენმა კომპიუტერმა გააკეთოს.

ვთქვათ 4 იყოს სიმრავლე 2 -ის ყველა ქვესიმრავლეებისა; გამარტივების მიზნით, ჩვენ ვაფიქსირებთ $4 = \{\emptyset, 0, 1, 01\}$. თუ p არის ფიქსირებული ფაქტი, ე.ი. პროპოზიციული ცვლადი, შემდეგ წარმოიქმნება ოთხი შესაძლებლობა:

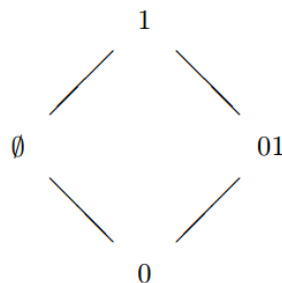
- ან კომპიუტერისთვის არის ნათქვამი, რომ p არის ჭეშმარიტი;
- ან რომ ის მცდარი;
- ან რომ ის არის ჭეშმარიტი და მცდარი (ვთქვათ ორი განსხვავებული აგენტით, ან სხვადასხვა ვითარებაში);

• ან კომპიუტერისათვის არაფერი არ უთქვამთ.

ეს ოთხი შესაძლებლობა შეესაბამება p -სთვის მნიშვნელობის მინიჭებას 4 – დან (მნიშვნელობები 1, 0, 01 და $\emptyset$, შესაბამისად). თითოეული p , მისი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობით უნდა გაიზარდოს მიმდევრობის მიხედვით მოცემულია მიახლოებითი ცხრილით



სხვაგვარი, განხილვა შესაბამისი ფაქტების იძლევა ლოგიკურ მესერის



ასეთნაირად, ცხრილები უარყოფისათვის, დიზიუნქციისათვის და კონიუნქციისათვის არის შემდეგი:

	$\neg$
$\emptyset$	$\emptyset$
0	1
1	0
01	01

$\vee$	$\emptyset$	0	1	01
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	1	1
0	$\emptyset$	0	1	01
1	1	1	1	1
01	1	01	1	01

$\wedge$	$\emptyset$	0	1	01
$\emptyset$	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0
0	0	0	0	0
1	$\emptyset$	0	1	01
01	0	0	01	01

ბელნაპის ლოგიკის მთავარი თვისება მდგომარეობს დამოკიდებულებაში აპროქსიმაციასა და ლოგიკურ მესერს შორის [28], [29], [33]. არ არის განსხვავებული მნიშვნელობები არც იმპლიკაციის კავშირი. ლოგიკური გამომდინარეობა არის მეტალინგვისტური: ჩვენ ვამბობთ, რომ A -დან ლოგიკურად გამომდინარეობს B , თუ, ყველა სტრუქტურისთვის σ , ჩვენ გვაქვს $\sigma(A) \leq \sigma(B)$ ლოგიკურ მესერში. ამ შემთხვევაში, ჩვენ ვწერთ $A \leq B$; ჩვენ ვწერთ $A \equiv B$, თუ $A \leq B$ და $B \leq A$ (მაგ., A და B სემანტიკურად ექვივალენტურია). როგორც $\vee$ და $\wedge$ განსაზღვრულია სტანდარტული გზით, ლოგიკური მესერის შესაბამისად, აქედან გამომდინარეობს, რომ ყველა ბულის ექვივალენტობები ფორმულების შორის, რომლებიცარ შეიცავს $\neg$ ასევე სრულდება ბელნაპის ლოგიკაში. კერძოდ, $\vee$ და $\wedge$ არის ასოციაციური, კომუტაციური და ურთიერთ დისტრიბუციული. ადვილი დასანახია, რომ $\neg\neg A \equiv A$ და რომ დემორგანის კანონები სრულდება. მეორეს მხრივ, არც მესამის გამორიცხვის კანონი $A \vee \neg A \equiv 1$ და არც მცდარობიდა ყველაფრის გამომდინარეობის კანონი $A \wedge \neg A \leq B$ ჩვეულებრივ არ არის ჭეშმარიტი; რატომაუნდა, ეს გვხვდება სისტემაში რომელსაც უნდა ჰქონდეს საქმე წინააღმდეგობასთან.

3 MV-ალგებრები

როგორც ჩვენ აღვნიშნეთ შესავალში, ეს ნაწილი არის უფრო მათემატიკურად ორიენტირებული, და ჩვენ ვგულისხმობთ უნივერსალური ალგებრის ცოდნას.

მის შინაგან ინტერესთან ერთად, ლოგიკის ალგებრაიზაცია იძლევა სასარგებლო მეთოდებს. პირველრიგში, ბევრი სისრულის მტკიცებულება ეყრდნობა წარმოდგენის თეორემებს ზოგიერთი თავისუფალი ალგებრისათვის. ეს ეხება სამ ლოგიკას 2.4.2 მაგალითიდან, და ამ ნაწილში ჩვენ ვაჩვენებთ მტკიცებულებას ლუკასევიჩის ლოგიკისათვის. მეორე მხრივ, შეიძლება მოიძებნოს ნორმალური ფორმა ფორმულისათვის. ეს ფორმები, უნდა ვაღიაროთ მცირეა, მაგრამ ჩვენ უკვე შევხვდით ერთ ასეთ მაგალითს §2.3 ბოლოში, და ლუკასევიჩის ლოგიკის შემთხვევაში ჩვენ მოგვყავს მიღებული შედეგი [69] -ში, [75]. მესამეს მხრივ, შეგვიძლია დავინახოთ მტკიცებულება, როგორც გამოთვლები ზოგიერთი ალგებრებში: ეს ცხადია, მაგალითად, სტაჩნიაკის მიდგომაში რეზოლუციების მიმართ. [80] და [10] ძირითადი ცნობები ალგებრული ლოგიკისათვის.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ლუკასევიჩის ლოგიკის ალგებრაიზაციას, და ვიკვლევთ შესაბამის ალგებრებს (MV- ალგებრებს). MV- ალგებრები შეესაბამება ლუკასევიჩის ლოგიკას, როგორც ბულის ალგებრები შეესაბამება კლასიკურ ლოგიკას. ისინი ქმნიან საინტერესო მათემატიკური ობიექტების კლასს, რომლებიც ჰქმნიან რელევანტურკავშირებს, კლასიკური მათემატიკის არეალში, როგორიცაა დალაგებული ჯგუფის თეორია, ფუნქციონალური ანალიზი და ალგებრული გეომეტრია. წიგნი [19] წარმოადგენს სისტემატიურ ანგარიშს ძირითადი შედეგებისა, გაფანტულს ლიტერატურაში.

3.1 ძირითადი ფაქტები

გავიხსენოთ, რომ ლუკასევიჩის ლოგიკაში კავშირების სიმრავლე $(\rightarrow, \neg, 1), (\rightarrow, 0), (\oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$ ურთიერთგამოსახვადია. მთლიანად ამ პარაგრაფში, ჩვენ ვაფიქსირებთ L -ს, რომ ენა იყოს $(\oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$, მსგავსების ტიპის $(2, 2, 1, 0, 0)$. ჩვენ ავღნიშნოთ I -ით აბსტრაქტულ ალგებრას, მიღებული მატრიციდან $L = (I, \{1\})$ §2.4-ში $\{1\}$ -ის მოშორებით, და ენის შეცვლის გზით $(\rightarrow, \neg, 1)$ -დან L -ით. უფრო ზუსტად, I -ს აქვს ბაზისურ სიმრავლედ, სიმრავლე ყველა ნამდვილი რიცხვებისა 0 -დან 1 -მდე, და ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$i \oplus j = \min\{i + j, 1\}$$

$$i \otimes j = \max\{i + j - 1, 0\}$$

$$\neg i = 1 - i$$

$$0 = \text{რიცხვი } 0$$

$$1 = \text{რიცხვი } 1$$

გადავწეროთ ლუკასევიჩის აქსიომები §2.4 -დან ტოლობების სახით:

$$L1. \neg a \oplus (\neg b \oplus a) = 1;$$

$$L2. \neg(\neg a \oplus b) \oplus (\neg(\neg b \oplus c) \oplus (\neg a \oplus c)) = 1;$$

$$L3. \neg(\neg \neg a \oplus \neg b) \oplus (\neg b \oplus a) = 1;$$

$$L4. \neg(\neg(\neg a \oplus b) \oplus b) \oplus (\neg(\neg b \oplus a) \oplus a) = 1.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ L1– L4 სრულდება I-ში.

განმარტება 3.1.1 MV- ალგებრა არის აბსტრაქტული ალგებრა $N = (N, \oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$ რომელიც აკმაყოფილებს L1– L4 ტოლობებს. ჩვენ ავღნიშნავთ **MV**-თი ყველა MV- ალგებრის კლასს.

MV- ალგებრები შემოღებული იყო ჩანგის მიერ [15]-ში. MV აღნიშნავს მრავალნიშნას; ეს სახელი კარგად არის დამკვიდრებული ლიტერატურაში, მაგრამ, ეს ალგებრები ეკუთვნის ერთ კონკრეტულ ლოგიკას, რომელსაც აქვს მრავალი მნიშვნელობა კერძოდ: ლუკასევიჩის. დავუშვებთ რა $a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b = \neg(\neg a \oplus b) \oplus b$ და $a \wedge b = \neg(\neg a \otimes b) \otimes b$, ჩვენ გვაქვს, რომ $(N, \vee, \wedge, 0, 1)$ არის შემოსაზღვრული დისტრიბუტიული მესერი [15], [16]. როგორც ჩვეულებრივ, ჩვენ ვწერთ $a \leq b$, თუ $a \vee b = b$.

L1– L4 აქსიომებით მუშაობა არ არის მოსახერხებელი. ჩანგის ორიგინალური აქსიომები არის

C1. $a \oplus b = b \oplus a;$	$a \otimes b = b \otimes a;$
C2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c;$	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c;$
C3. $a \oplus \neg a = 1;$	$a \otimes \neg a = 0;$
C4. $a \oplus 1 = 1;$	$a \otimes 0 = 0;$
C5. $a \oplus 0 = a;$	$a \otimes 1 = a;$
C6. $\neg(a \oplus b) = \neg a \otimes \neg b;$	$\neg(a \otimes b) = \neg a \oplus \neg b;$
C7. $\neg\neg a = a;$	
C8. $\neg 0 = 1;$	
C9. $a \vee b = b \vee a;$	$a \wedge b = b \wedge a;$
C10. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c;$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c;$
C11. $a \oplus (b \wedge c) = (a \oplus b) \wedge (a \oplus c);$	$a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c).$

უფრო კომპაქტური აქსიომიზაცია შემოტანილი იქნა მანგანისა და მუნდიჩის მიერ[65]:

- M1. $a \oplus b = b \oplus a$;
 M2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
 M3. $a \oplus 0 = a$;
 M4. $a \oplus 1 = 1$;
 M5. $\neg \neg a = a$;
 M6. $\neg 0 = 1$;
 M7. $\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a$;
 M8. $a \otimes b = \neg(\neg a \oplus \neg b)$.

ყოველ MV-ალგებრაში სრულდება:

1. დემორგანის კანონი $\vee, \wedge, \neg$ -თვის;
2. $a \otimes b \leq a \wedge b \leq a \leq a \vee b \leq a \oplus b$;
3. $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$;
4. $a \vee b = b$ iff $\neg a \oplus b = 1$;
5. $a \oplus b = b$ iff $\neg a \vee b = 1$;
6. $a \oplus (b \vee c) = (a \oplus b) \vee (a \oplus c)$;
7. $a \otimes (b \wedge c) = (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$.

რადგან $\oplus, \otimes, \vee, \wedge$ ასოციაციური და კომუტატორია, ჩვენ თავისუფლად ვიყენებთ ფორმას $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k$ და მათი მსგავსი. ჩვენ ვუშვებთ $0a = 0$, $(k+1)a = a \oplus ka$ და $a^0 = 1$, $a^{k+1} = a \otimes a^k$. ჩვენ ვამბობთ, რომ a -ს აქვს რიგი k , თუ k არის ყველაზე მცირე დადებითი რიცხვი ისეთი, რომ $ka = 1$; თუ ასეთი k არ არსებობს, ჩვენ ვამბობთ, რომ a -ს აქვს უსასრულო რიგი.

მაგალითი 3.1.2 ჩვენ უკვე შემოვიტანეთ MV-ალგებრა I. მოდით აღვნიშნოთ $[0, 1]^n$ n -ეულების სიმრავლე რომლის ელემენტები ეკუთვნის $[0, 1]$; $[0, 1]^\omega$ ეს არის თვლადი ელემენტების სიმრავლე რომლის ელემენტებიც ეკუთვნის $[0, 1]$. მაკნოტონის ფუნქცია $[0, 1]^n$ -ზე არის უწყვეტი ფუნქცია $f: [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}$, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი პირობა:

არსებობს წრფივი აფინური პოლინომები $f_1, \dots, f_k$ ყოველი f_i ფორმით $a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^n x_n + a_i^{n+1}$ ზოგიერთი მთელი რიცხვებისათვის $a_i^1, \dots, a_i^{n+1}$, ისეთია, რომ ყოველი $\sigma \in [0, 1]^n$ -თვის, $1 \leq i \leq k$ -ზე გვაქვს $f(\sigma) = f_i(\sigma)$.

მაკნოტონის ფუნქცია $[0, 1]^\omega$ -ზე არის ფუნქცია $g: [0, 1]^\omega \rightarrow \mathbf{R}$ ისეთი, რომ არსებობს მაკნოტონის ფუნქცია $f: [0, 1]^n$ -ზე რომლისთვისაც $g = f \circ \rho_n$ (ρ_n ბუნებრივი პროექციაა: $[0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]^n$). დავუშვათ M_n იყოს ქვესიმრავლე $I^{[0, 1]^n}$ რომლის ელემენტებიც არის მაკნოტონის ფუნქციები $[0, 1]^n$ -ზე. ადვილი დასანახია, რომ M_n ფაქტიურად არის ქვეალგებრა, შესაბამისად MV-ალგებრა. ანალოგიურად M_ω არის MV-ალგებრა ყველა მაკნოტონის ფუნქციისათვის $[0, 1]^\omega$ -ზე რომლის მნიშვნელობები ეკუთვნის $[0, 1]$ -ს. დავუშვათ, რომ 0 და 1 არის ფუნქციები, დომეინი არის $[0, 1]^n$ ან $[0, 1]^\omega$ კოდომეინი კონტექსტის მიხედვით, რომლის მნიშვნელობაცაა შესაბამისად 0 ან 1 .

$FORM_n(L)$ იყოს $FORM(L)$ -ს ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტებიც აგებულია მხოლოდ პროპოზიციული სიმბოლოებით $p_1, \dots, p_n$. ჩვენ ვაიგივებთ $FORM(L)$ ტერმების სიმრავლესთან MV - ალგებრის ენაზე; როდესაც ჩვენ გვაქვს $A \in FORM_n(L)$, მას აღვიქვამთ როგორც ტერმი, ჩვენ ვცვლით თავისუფალ ცვლადებს $x_1, \dots, x_n$ მოცემული ცვლადებისათვის $p_1, \dots, p_n$. ჩვენ ასევე ვაიგივებთ სივრცეს ყველა სტრუქტურას $[0, 1]^\omega$ – სთან. თუ A არის ფორმულა, მაშინ A ინდუცირებს ასახვას $A: [0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]$ ბუნებრივი გზით: $A(\sigma) = \sigma(A)$. თუ $A \in FORM_n(L)$, მაშინ $\sigma(A)$ -ს მნიშვნელობა არ იცვლება, როცა იცვლება $\sigma(q)$ -ს მნიშვნელობა, როცა $q \notin \{p_1, \dots, p_n\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ A -ს მიმართ, სივრცე ყველა სტრუქტურებისა იდენტიფიცირდება n -კუბთან და ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ A როგორც ფუნქცია $A: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$. უბრალო ინდუქციით A -ს სირთულის მიმართ გვიჩვენებს, რომ A იგულისხმება მაცნონტონის ფუნქციით, ე. ი. M_ω ან M_n -ის ელემენტია, შესაბამისად.

$A, B \in FORM(L)$ -თვის ჩვენ ვწერთ $A \equiv B$, თუ ტერმების ტოლობა $A = B$ სრულდება ყველა MV - ალგებრაში; ეკვივალენტურია, ტოლობა $A = B$ გამოიყვანება $L1-L4, C1-C11, M1-M8$ -დან აღრიცხვის წესების გამოყენებით. მიმართება $\equiv$ არის კონგრუენცია და $F_\omega = FORM(L)/\equiv$ და $F_n = FORM_n(L)/\equiv$ არის თავისუფალი MV - ალგებრები შესაბამისად ω და n წარმომქნელებით. ფუნქცია $(A/\equiv) \mapsto A$ არის MV - ალგებრების ჰომომორფიზმი, ან F_ω -დან M_ω -ზე, ან F_n -დან M_n -ზე.

დავწეროთ C_{LPC} , გამომდინარეობის ოპერაციისათვის, ინდუცირებული აქსიომათა სქემებით $Ax1-Ax4$ §2.4-დან, გამოყვანა მოდუს პონენსი. ლუკასევიჩის უსასრული აღრიცხვის სისრულის თეორემა გამოისახება ნებისმიერ შემდეგ ფორმაში:

L არის სუსტად ადეკვატური C_{LPC} ;

$A \equiv 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = 1$;

ყოველი n - სთვის, ჰომომორფიზმი $(A/\equiv) \mapsto A: F_n \rightarrow M_n$ არის ინექციური;

4. ჰომომორფიზმი $(A/\equiv) \mapsto A: F_\omega \rightarrow M_\omega$ არის ინექციური;

$A \equiv B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = B$;

F_ω მიეკუთვნება MV -ს ქვემრავალსახეობას წარმოქმნილს I -თი;

I წარმოქმნის MV -ს.

როგორც აღინიშნა § 2.4 – ში, არსებობს რამდენიმე სხვადასხვა მტკიცებულება ამ მტკიცებებისა. ჩვენ მოგაწვდით ჩანგის დამტკიცება (6)-ს [16]-დან. პირველ ნაბიჯად, ჩანგი აჩვენებს, რომ ყოველი MV - ალგებრა არის ქვეპირდაპირი ნამრავლი წრფივად დალაგებული MV - ალგებრებისა (ჩვენ ვნახავთ ამას §3.2). ეს დაიყვანება მტკიცებულებამდე, რომ ყოველი წრფივად დალაგებული MV - ალგებრა მიეკუთვნება MV -ს ქვემრავალსახეობას წარმოქმნილს I -თი, ე. ი. ყველა ჭეშმარიტი ტოლობა I - ში, ასევე სამართლიანია ყოველი წრფივად დალაგებული MV - ალგებრაში.

განსაზღვრება 3.1.3 წრფივად დალაგებული აბელის ჯგუფი (ℓ -ჯგუფი) არის ალგებრა $(G, +, -, 0, \vee, \wedge)$ ისეთი რომ $(G, +, -, 0)$ არის აბელის ჯგუფი, $(G, \vee, \wedge)$ არის მესერი და სრულდება ტოლობა $a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c)$. წრფივად დალაგებული აბელის ჯგუფი (o -ჯგუფი) არის ℓ -ჯგუფი, რომელშიც მესერი არის წრფივი. ℓ ჯგუფი G -ს მკაცრი ერთეული არის ელემენტი $u > 0$ G -დან ისეთი, რომ ყველა $a \in G$ - სთვის არსებობს $m \in \mathbb{N}$ $a \leq mu$ პირობით.

კარგად ცნობილია [107] რომ:

a. ყველა უნივერსალური ფორმულა $(+, -, 0, \vee, \wedge)$ ენაში, რომელიც მართებულია $\mathcal{Q}$ - ში, სამართლიანია ყველა o -ჯგუფში.

ჩანგის ფუნდამენტური იდეაა ასოცირებულია:

b. ყველა წრფივად დალაგებულ MV - ალგებრა N -ს შეესაბამება წყვილი (G_N, u_N) , სადაც G_N არის o -ჯგუფი, ხოლო u_N მკაცრი ერთეულია G_N -დან; კერძოდ, $(\mathbf{R}, 1)$ შეესაბამება I -ს;

c. ყოველ ტოლობას $A = B$ MV - ალგებრის ენაში თავისუფალი ცვლადებით $x_1, \dots, x_n$ შეესაბამება კვანტორიანი ფორმულა $\phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, y)$ ℓ - ჯგუფის ენაში; ისეთნაირად, რომ:

d. $N \models \forall x_1 \dots \forall x_n (A = B)$ მმმ, როცა $G_N \models \forall x_1 \dots \forall x_n \phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, u_N)$.

დავუშვათ $A = B$ იყოს ნებისმიერი ტოლობა MV - ალგებრის ენაში, თავისუფალი ცვლადებით $x_1, \dots, x_n$, ვთქვათ N იყოს წრფივად დალაგებული MV - ალგებრა, და დავუშვათ $I \models \forall x_1, \dots, x_n (A = B)$. მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$\mathbf{R} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, 1)$, (b) და (d)-ს გამოყენებით;

$\mathcal{Q} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, 1)$, ვინაიდან $\mathcal{Q}$ არის $\mathbf{R}$ -ის ℓ ქვეჯგუფი;

$\mathcal{Q} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (0 < y \rightarrow \phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, y))$, რადგანაც, ყოველი $0 < c \in \mathcal{Q}$ არსებობს $\mathcal{Q}$ -ს ავტომორფიზმი, რომელიც ასახავს 1 -ს c -ში;

$G_N \models \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (0 < y \rightarrow \phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, y))$, (a)-ს გათვალისწინებით;

$G_N \models \forall x_1 \dots \forall x_n \phi_{AB}(x_1, \dots, x_n, u_N)$;

$N \models \forall x_1 \dots \forall x_n (A = B)$, (d)-ს გათვალისწინებით.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $A = B$ – ს სამართლიანობიდან I -ში გამომდინარეობს $A = B$ – ს სამართლიანობა N - ში, რაც არის, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

სისრულის თეორემის ძალით, ჩვენ შეგვიძლია შევამოწმოთ, ტოლობა სრულდება ყოველ MV - ალგებრაში მისი I -ში შემოწმებით. ეს კარგად მოწმდება ზულის ალგებრების შემთხვევაში, სადაც ჩვენ ვამოწმებთ ტოლობას 2 -ში. ვინაიდან მაკნოტონის ფუნქციები უწყვეტია, ჩვენ შეგვიძლია ფაქტიურად შევამოწმოთ ტოლობები I -ს ქვეალგებრაში, რომლის ელემენტები რაციონალური რიცხვებია 0 დან 1 -მდე. კარგი შემთხვევაა, როცა ტავტოლოგიების პრობლემების გამოთვლის სირთულე არ არის ზრდადი: $C_{LPC}(\emptyset) = C_L(\emptyset)$ არის co -NP სისრულის [66].

კიდევ ერთხელ სისრულეზე, ცნობილია, რომ F_n და F_ω არიან შესაბამისად M_n და M_ω ქვეალგებრები. სინამდვილეში, რაღაც უფრო ძლიერი ხდება: მაკნოტონის თეორემის [59] ეფექტი მდგომარეობს იმაშია, რომ ჩადგმა $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A}$ არის სურექცია, ისე რომ M_n და M_ω არიან იზომორფულები თავისუფალი MV- ალგებრებისა n და ω წარმომქმნელებით. ეს საშუალებას გვაძლევს თავისუფლად გავაიგივოთ ფორმულა A მისი ეკვივალენტობის კლასთან $(A/\equiv)$ და $\mathbf{A}$ ფუნქციით; ჩვენ გავაკეთებთ ამას შემდგომში.

[65] -ში, მუნდიჩი აფართოებს შესაბამისობას $N \mapsto (G_N, u_N)$ ნებისმიერ MV- ალგებრებზე.

განმარტება 3.1.4 დავუშვათ G, H ℓ ჯგუფებია, u არის G - ს ფიქსირებული მკაცრი ერთეული და v არის H -ის მკაცრი ერთეული. ხოლო უნიტალური ჰომომორფიზმი $\phi: (G, u) \rightarrow (H, v)$ არის ℓ -ჯგუფის ჰომომორფიზმი $\phi: G \rightarrow H$ ისეთი, რომ $\phi(u) = v$.

მკაცრი ერთეულებიანი ℓ -ჯგუფების კატეგორია არის კატეგორია, რომლის ობიექტებია ყველა წყვილი (G, u) , სადაც G არის ℓ -ჯგუფი და u მისი მკაცრი ელემენტი, და რომლის მორფიზმები არის უნიტალური ჰომომორფიზმები.

წინადადება 3.1.5 [65, თეორემა 2.5] დავუშვათ (G, u) არის ℓ ჯგუფის მკაცრი ერთეული u -თი. ვთქვათ, $\Gamma(G, u)$ არის სტრუქტურა

$$\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$$

განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$[0, u] = \{a \in G : 0 \leq a \leq u\}$$

$$a \oplus b = (a + b) \wedge u$$

$$a \otimes b = (a + b - u) \vee 0$$

$$\neg a = u - a$$

$$0 = \text{ადიციური აღნიშვნა } 0\text{-ს } G\text{-დან}$$

$$1 = u$$

მაშინ $\Gamma(G, u)$ არის MV- ალგებრა, და მესერის დალაგება ინდუცირებული MV-ს ოპერაციებით ემთხვევა G ℓ ჯგუფიდან გადმოსულს მემკვიდრეობით. ვთქვათ $\phi: (G, u) \rightarrow (H, v)$ იყოს უნიტალური ჰომომორფიზმი და ვთქვათ Γ_ϕ იყოს ϕ შეზღუდვა $[0, u]$ -ზე. მაშინ გამოსახულება Γ_ϕ იმყოფება $[0, v]$ -ში, და $\Gamma_\phi: \Gamma(G, u) \rightarrow \Gamma(H, v)$ არის MV- ალგებრის ჰომომორფიზმი.

მაგალითი 3.1.6. სიმრავლე $M[0, 1]^n$ ყველა მაკნოტონის ფუნქციებისა $[0, 1]^n$ -ზე არის ჯგუფი $\mathbf{R}[0, 1]^n$ -ის ℓ - ქვეჯგუფი, და 1 არის მისი მკაცრი ერთეული. ჩვენ გვაქვს $M_n = \Gamma(M[0, 1]^n, 1)$. ანალოგიურად, სიმრავლე $M[0, 1]^\omega$ ყველა მაკნოტონის ფუნქციებისა $[0, 1]^\omega$ -ზე არის ℓ ჯგუფი და $M_\omega = \Gamma(M[0, 1]^\omega, 1)$.

მაგალითი 3.1.7 ვთქვათ $\mathbf{Z} \oplus_{\text{lex}} \mathbf{Z}$ იყოს $\circ$ - ჯგუფი, რომლიც აბელის ჯგუფი არის ორი $\mathbf{Z}$ -დან ასლის პირდაპირი ჯამი ლექსიკოგრაფიული დალაგებით:

$(a, b) \leq (c, d)$ მმ $(a < c$ ან $(a = c$ და $b \leq d)$).

ჩანგის ალგებრა არის MV- ალგებრა $C = \Gamma(\mathbf{Z} \oplus_{\text{lex}} \mathbf{Z}, (1, 0))$ [15, გვ. 474]. C -ს დალაგების ტიპი შედგება ნატურალური რიცხვების ორი ასლისგან შეერთებული პირისპირ:

$$(0, 0) < (0, 1) < (0, 2) < \dots < (1, -2) < (1, -1) < (1, 0).$$

C არის პროტოტიპი მაგალითისა არამარტივი წრფივად დალაგებული MV- ალგებრისა (იხ. . §3.2). ელემენტი $(0, 1)$ წარმოქმნის C- ს, რომელიც ამიტომ არის M_1 ფაქტორი.

თეორემა 3.1.8 [65, თეორემა 3.9] Γ ფუნქტორი არის სრული, მართებული და წარმოდგენადი (ე.ი. კატეგორიული ექვივალენტურობა) ℓ -ჯგუფების მკაცრი ერთეულით კატეგორიისა და MV- ალგებრის კატეგორიას შორის. კერძოდ ყოველი N MV- ალგებრისთვის ერთადერთი არსებობს უნიტალური ℓ -ჯგუფი, მკაცრი ერთეულით (G_N, u_N) ისეთი, რომ N არის იზომორფული $\Gamma(G_N, u_N)$ -ის . თუ N არის თვლადი, მაშინ G_N -იც არის თვლადი.

Γ ფუნქტორი გვაძლევს საშუალებას გადავთარგმნოთ ფაქტები და ამოცანები MV- ალგებრებიდან ℓ -ჯგუფებზე და პირიქით.

ტექნიკა ერთ ველიდან შეიძლება იყოს გადატანილი მეორეზე და, ვინაიდან ℓ -ჯგუფებს აქვთ შესაბამისი კავშირები ანალიზთან (მართლაც, ტიპიური ℓ -ჯგუფები არის უწყვეტი ფუნქციების ჯგუფები) ეს შესაბამისობა შეიძლება იყოს უფრო გაფართოვებული. როგორც მაგალითი ამ დამოკიდებულებისა, ჩვენ ვუთითებთ [70], სადაც ყველა C^* -ალგებრები, რომლის ჯგუფი K_0 არის მესერულად დალაგებული და რომელიც არის ზღვარი სასრული განზომილების C^* -ალგებრების მიმდევრობებისა, იყო კლასიფიცირებული MV- ალგებრის დახმარებით.

3.2 იდეალები და წარმოდგენები

ვთქვათ N იყოს MV-ალგებრა. N -ის იდეალი არის N -ის ქვესიმრავლე J , რომელიც შეიცავს 0 -ს, ჩაკეტილია $\oplus$ მიმართ, და ისეთი, რომ თუ $a \leq b \in J$ მაშინ $a \in J$; J არის საკუთრივი, თუ $J \neq M$. დუალურად, N -ის ფილტრი არის N -ის ქვესიმრავლე F რომელიც შეიცავს 1 , ჩაკეტილია $\otimes$ მიმართ, და ისეთი, რომ თუ $a \geq b \in F$ მაშინ $a \in F$. რათქმაუნდა, J არის იდეალი მმ $\{-a : a \in J\}$ არის ფილტრი და პირიქით. ასევე ადვილი დასანახია, რომ F არის ფილტრი მმ F არის ჩაკეტილი მოდუს პონუსის მიმართ (თუ $a, a \rightarrow b \in F$, მაშინ $b \in F$) და შეიცავს 1 ; ამიტომ, ფილტრები შეესაბამება თეორიებს უსასრულო-ნიშნა აღრიცხვას. როგორც ჩვეულებრივ, ყოველი იდეალი J შესაბამება კონგრუენციას $\sim_J$

$$a \sim_J b \text{ მმ } \neg(a \leftrightarrow b) = (a \otimes \neg b) \vee (b \otimes \neg a) \in J$$

და 0 -ის ექვივალენტობის კლასი ნებისმიერი კონგრუენციისა არის იდეალი. ჩვენ ვწერთ N / J N -ის ბუნებრივი ეპიმორფიზმია ასახვა $a \mapsto a / J = a / \sim_J$.

თუ X არის N - ის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, მაშინ ფილტრი $\bar{X}$ წარმოქნილი X - გან არის გადაკვეთა ყველა ფილტრებისა, რომლებიც შეიცავს X -ს. ძნელი არ არის იმის დანახვა, რომ $\bar{X}$ ემთხვევა სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტებისა $a \in N$ - დან, რომლისთვისაც არსებობს $b_1, b_2, \dots, b_r \in X$ (არ არის აუცილებლად განსხვავებული) $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_r \leq a$ პირობით. თუ ამას

გადავიყვანოთ ლუკასევიჩის აღრიცხვის ტერმებში, ჩვენ ვღებულობთ უსასრულო-მნიშვნელობათა ვერსიებს დედუქციის თეორემისა [82, თეორემა 2.2]:

$A_1, \dots, A_r \vdash B$ მმმ $(A_1 \otimes \dots \otimes A_r)^t \rightarrow B$ რომლისთვისაც $t \geq 1$.

ვთქვათ J არის N MV- ალგებრის საკუთრივი იდეალი. J არის მაქსიმალური, თუ ის არ არის საკუთრივი ქვესიმრავლე რაიმე შესაბამისი იდეალის. J არის მარტივი, თუ ნებისმიერი J_1, J_2 იდეალებისთვის, თუ $J = J_1 \cap J_2$, მაშინ $J = J_1$ ან $J = J_2$.

წინადადება 3.2.1. დავუშვათ N, J არის ისეთი როგორც არის ზემოთ მოცემული.

1. შემდეგი მტკიცებები ექვივალენტურია:

ა. J მარტივია;

ბ. ნებისმიერი, $a, b \in N$, $\neg a \otimes b \in J$ ან $a \otimes \neg b \in J$;

გ. $a \wedge b \in J$ -დან გამომდინარეობს $a \in J$ ან $b \in J$;

დ. N/J არის წრფივად დალაგებული;

ე. იდეალების სიმრავლე, შეიცავენ J -ს, წრფივად დალაგებულია ჩართვის მიმართ.

2. შემდეგი მტკიცებები ექვივალენტურია:

ვ. J არის მაქსიმალური;

ზ. თუ $a \notin J$, მაშინ არსებობს $k \in N$ ისეთი, რომ $(\neg a)^k \in J$;

თ. N/J არის იზომორფული I -ს ქვეალგებრისა.

[16, ლემა 2] -ში, ჩანგი ამტკიცებს, რომ იდეალი, რომელიც არის გამომდინარე მაქსიმალური თვისებებიდან დაკავშირებით რომელიღაც ელემენტის N -იდან გამორიცხვასთან, არის მარტივი. ცორონის ლემით, ეს მოითხოვს, რომ გადაკვეთა ყველა მარტივი იდეალებისა ტოლია 0 -ის, და ამრიგად, N შეიძლება ჩადგმული იყოს $\prod \{N/P : p \text{ არის } N - \text{ის მარტივი იდეალი}\}$. ეს არის MV- ალგებრის წარმოდგენა, როგორც წრფივად დალაგებული MV- ალგებრის ქვეპირდაპირი ნამრავლისა, რომელზედაც ჩვენ ვეყრდნობით სისრულის თეორემის დასამტკიცებლად. თუ N -ს ყველა მაქსიმალური იდეალების თანაკვეთა ტოლია 0 -ის, მაშინ წინადადება 3.2.1 (2) გამოყენებით ჩვენ ვიღებთ N -ის წარმოდგენას როგორც ქვეპირდაპირი ნამრავლისა ქვეალგებრისა I -დან; ჩვენ ჩამოვყალიბებთ ამას წინადადებაში 3.2.3 (3)-ში.

[21] -ში, დი ნოლამ აჩვენა, რომ ყოველი MV- ალგებრა არის "შავ – თეთრი სურათების" ალგებრისა შესაძლოა უსასრულოდ მცირე ნაცრისფერი დონით:

თეორემა 3.2.2 ყოველი MV- ალგებრისათვის N არსებობს სიმრავლე X და არასტანდარტული ნამდვილ რიცხვთა ინტერვალი I^* ისეთი, რომ N არის ფუნქციების $X \rightarrow I^*$ ალგებრა.

ნებისმიერი იდეალისთვის J , $\text{Rad } J$ იყოს ყველა მაქსიმალური იდეალების თანაკვეთა, რომლებიც შეიცავენ J -ს. ცნობილია, რომ $\text{Rad } J = \{a: a \otimes (ka) \in J \text{ ყოველი } k \geq 1\}$ -ისთვის}. ჩვენ ვამბობთ, რომ N არის:

- მარტივი, თუ 0 არის ერთადერთი საკუთრივი იდეალი;
- ნახევრად მარტივი, თუ $\text{Rad } 0 = 0$;
- ჰიპერარქიმედიული, თუ ყველა N -ის ფაქტორი არის ნახევრად მარტივი (ე.ი. $\text{Rad } J = J$ ყოველი J იდეალისთვის);
- სრულია, თუ $(N, \vee, \wedge, 0, 1)$ არის სრული, როგორც მესერი.

ელემენტი $a \in N$ დამატებადია (მაგ., $-a \vee a = 1$) მმ $a \oplus a = a$. როგორც პოსტის ალგებრის შემთხვევაში, ჩვენ ავლიშნეთ $C(N)$ -ით ბულის ალგებრას ყველა დამატებადი ელემენტებისა N -დან.

თეორემა 3.2.3 ვთქვათ N იყოს MV -ალგებრა.

1. შემდეგი ექვივალენტურებია:

- a. N არის მარტივია;
- b. ყოველი არანულოვან ელემენტს N -დან აქვს სასრული რიგი;
- c. N არის I -ს ქვეალგებრა.

2. შემდეგი ექვივალენტურებია:

- d. N არის ჰიპერარქიმედიული;
- e. მარტივი და მაქსიმალური იდეალი N ემთხვევა;
- f. ყოველი $a \in N$ -თვის, არსებობს n ისეთი, რომ $na \in C(N)$.

3. შემდეგი ექვივალენტურებია:

- g. N არის ნახევრად მარტივი;
- h. N წარმოადგენს I -ს ქვეალგებრების ქვეპირდაპირ ნამრავლს;
- j. N არის რომელიღაც სრული MV -ალგებრის ქვეალგებრა.

4. (a)-დან გამომდინარეობს (d), და (d)-დან გამომდინარეობს (g), მაგრამ პირიქით არა.

5. თუ N არის წრფივად დალაგებული, მაშინ ყველა პირობა (a) - (j) ექვივალენტურია.

დამტკიცება. (1) გამომდინარეობს წინადადებიდან 3.2.1 (2). (e) $\Rightarrow$ (d) ნათელია, მაშინ, როდესაც (d) $\Rightarrow$ (e) გამომდინარეობს (a) და (e) ქვეპუნქტების ექვივალენტობით წინადადებაში 3.2.1 (1). ექვივალენტობა (e) და (f) ცოტათი არის გაფანტული ლიტერატურაში; მარტივი მტკიცებულება შეიძლება იყოს მიღებული Γ ფუნქტორის შენახვის თვისების გამოყენებით [7,

თეორემა 14.1.2]; აგრეთვე [103]. ჩვენ უკვე განვიხილეთ ექვივალენტობა $(g) \iff (h)$; ექვივალენტობა (j) -სთან დამტკიცებულია [50] -ში. ნათელია, რომ (a) -დან გამომდინარეობს (d) , რომლიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს (g) . I-ს ორი ასლის პირდაპირი ნამრავლი არ არის მარტივი ჰიპერარქიმედიული ალგებრა, იმ დროს როდესაც M_1 არის ნახევრად მარტივი (h) -ის მიხედვით, და არა ჰიპერარქიმედიული (ჩანგის ალგებრა 3.1.7 მაგალითიდან არის M_1 -ის არა მარტივი ფაქტორი). და ბოლოს, დავუშვათ, რომ N არის წრფივად დალაგებული და ნახევრად მარტივი. მაშინ იდეალები 0-ზე ზემოთ ქმნიან ჯაჭვს წინადადებით 3.2.1 (1). ვინაიდან N არის ნახევრად მარტივი, 0 არის მაქსიმალური იდეალი. $\square$

3.3 თავისუფალი MV- ალგებრა

ნებისმიერი MV- ალგებრა N -სთვის, მისი სპექტრი $\text{Spec}N$ არის მისი ყველა მარტივი იდეალების სიმრავლე, სადაც განსაზღვრული ჰულ-კერნის ტოპოლოგია: $U \subseteq \text{Spec}N$ სიმრავლის ჩაკეტვა არის $\{p \in \text{Spec}N : p \supseteq \cap U\}$. $\text{MaxSpec}N$ არის $\text{Spec}N$ -ის ქვესივრცე, რომლის წერტილებიც არის მაქსიმალური იდეალები. შემგომ, κ იცვლება სიმრავლეში $\{1, 2, 3, \dots, \omega\}$. [65, წინადადება 8.1] სივრცე $[0, 1]^\kappa$ არის $\text{MaxSpec}M_\kappa$ ჰომომორფული $\sigma \mapsto \{A \in M_\kappa : A(\sigma) = 0\}$ ასახვით; ჩვენ შეგვიძლია ჩავვწერთ $A \in \sigma$ $A(\sigma) = 0$ -თვის. $U \subseteq [0, 1]^\kappa$ -თვის, ჩვენ ავღნიშნავთ $A|U$ ფუნქცია $A \in M_\kappa$ შეზღუდვას U -ზე, ხოლო $M_\kappa|U$ -თი MV- ალგებრა $\{A|U : A \in M_\kappa\}$. როგორც იყო მოსალოდნელი $M_\kappa|U$ არის იზომორფული $M_\kappa / \cap U; M_\kappa$ -ს ყველა ნახევრადმარტივი ფაქტორებს აქვთ ასეთი სახე.

ახლა ჩვენ შეიძლება დავახასიათოთ ქვესიმრავლე $\Gamma \subseteq \text{FORM}(L)$ -დან, რომელთათვისაც სისრულის თეორემა სრულდება მკაცრი ფორმით::

$$C_{LPC}(\Gamma) = C_L(\Gamma).$$

ვთქვათ J_Γ არის იდეალური M_ω -დან წარმოქმნილი $\{\neg B : B \in \Gamma\}$ -დან; მაშინ $A \in C_{LPC}(\Gamma)$ ნიშნავს, $\neg A \in J_\Gamma$. მეორეს მხრივ, ჩვენ გვაქვს

$$A \in C_L(\Gamma) \text{ მმ } \forall \sigma \in [0, 1]^\omega (\sigma(\Gamma) \subseteq \{1\} \Rightarrow \sigma(A) = 1)$$

$$\text{მმ } \forall \sigma \in [0, 1]^\omega (\sigma(J_\Gamma) \subseteq \{0\} \Rightarrow \sigma(\neg A) = 0)$$

$$\text{მმ } \forall \sigma \in \text{MaxSpec}M_\omega (\sigma \supseteq J_\Gamma \Rightarrow \neg A \in \sigma)$$

$$\text{მმ } \neg A \in \text{Rad}(J_\Gamma).$$

ასე, რომ მკაცრი სისრულის თეორემა სამართლიანია იმ Γ -სთვის, რომლებისთვისაც $J_\Gamma = \text{Rad}(J_\Gamma)$, ე.ი. იმათის რომლისთვისაც M_ω / J_Γ ნახევრად მარტივია. კერძოდ, ეს სრულდება თუ Γ არის სასრული [47, გვ. 84].

მაგალითი 3.3.1 როგორც ჩვენ ავღნიშნეთ §2.4-ში, $a \oplus a = a$ დამატებით MV- ალგებრების აქსიომებს გვაძლევს MV-ს ქვემრავალსახეობას, რომელიც ემთხვევა ბულის ალგებრების

მრავალსახეობას. ყველა ბულის ალგებრა არის ნახევრად მარტივი და ჰიპერარქიმედიული, და სრულდება მკაცრი სისრულის თეორემა.

Γ ფუნქტორი ინახავს იდეალების მესერს ℓ -ჯგუფში მკაცრი ერთეულით (G, u) . ცნობილი ფაქტის მიხედვით ℓ ჯგუფის თეორიიდან [7], ყოველი MV-ალგებრას აქვს კომპაქტი, T_0 და სობერის სპექტრი (სობერი ნიშნავს, რომ ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც არ არის გაერთიანება ორი ჩაკეტილი სიმრავლისა წარმოადგენს წერტილის ჩაკეტვას). ხოლო რთული და ჯერ კიდევ ღია პრობლემა მდგომარეობს იმაში, რომ მიეცეთ ტოპოლოგიური დახასიათება MV-ალგებრის სპექტრისა. ფუნქცია, რომელიც ასოცირდება ყოველი მარტივი იდეალი p -დან ერთადერთი მაქსიმალური იდეალი, რომელიც შეიცავს p -ს არის უწყვეტი რეტრაქტი, და $\text{MaxSpec } N$ არის კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცე. თუ N არის ჰიპერარქიმედიანი, მაშინ $\text{Spec } N = \text{MaxSpec } N$ სრულად არაბმულია და ემთხვევა $C(N)$ -ის სტოუნის სივრცეს. ამ შემთხვევაში, N არის ბულის ნამრავლი ქვეალგებრებისა I -დან [103].

დავუშვათ $\alpha: N \rightarrow Q$ MV-ალგებრის ჰომომორფიზმი. $\text{Spec } \alpha: \text{Spec } Q \rightarrow \text{Spec } N$ განსაზღვრული როგორც $(\text{Spec } \alpha)(p) = \alpha^{-1}(p)$ არის უწყვეტი ფუნქცია. თუ p არის Q -ს მაქსიმალური იდეალი, მაშინ $(\text{MaxSpec } \alpha)(p) = \alpha^{-1}(p)$ არის N -ის მაქსიმალური იდეალი. აქედან გამომდინარეობს, რომ Spec და MaxSpec არიან კონტრავარიანტული ფუნქციტორები MV-ალგებრის კატეგორიიდან ტოპოლოგიური სივრცეების და უწყვეტი ფუნქციების კატეგორიაში.

გასაზღვრება 3.3.2. მაკნოტონის ჰომომორფიზმი $[0, 1]^K$ -ზე არის ფუნქცია $f: [0, 1]^K \rightarrow [0, 1]^K$ ისეთი, რომ, ყოველი პროექციისთვის $\pi_i: [0, 1]^K \rightarrow [0, 1]$, $f_i = \pi_i \circ f$ არის მაკნოტონის ფუნქცია. თუ $f \circ g = g \circ f$ (იგივური ფუნქცია), რომელიმე g მაკნოტონის მორფიზმისათვის, მაშინ ჩვენ ვამბობთ, რომ f არის მაკნოტონის ჰომომორფიზმი.

თუ f არის მაკნოტონის მორფიზმი $[0, 1]^K$ -ზე, მაშინ ასახვა $f^*: M_K \rightarrow M_K$ განსაზღვრული როგორც $f^*(A) = A \circ f$ არის M_K -ს ენდომორფიზმი. ექვივალენტურია, f^* არის ენდომორფიზმი განსაზღვრული $x_i \mapsto f_i$. თუ $\alpha: M_K \rightarrow M_K$ არის ენდომორფიზმი, მაშინ $\text{MaxSpec } \alpha$ შეიძლება იყოს ბუნებრივად გაიგივებული მაკნოტონის მორფიზმთან $f: [0, 1]^K \rightarrow [0, 1]^K$ განსაზღვრულს როგორც $f_i = \alpha(x_i)$. სინამდვილეში, გაიგივების შედეგად $\sigma \in [0, 1]^K$ მაქსიმალური იდეალთან $\{A \in M_K: A(\sigma) = 0\}$, ჩვენ გვაქვს

$$\begin{aligned} (\text{MaxSpec } \alpha)(\sigma) &= \alpha^{-1}(\sigma) \\ &= \{A: \alpha(A) \in \sigma\} \\ &= \{A: (\alpha(A))(\sigma) = 0\} \\ &= \{A: (A(\dots, f_i, \dots))(\sigma) = 0\} \\ &= \{A: A(f(\sigma)) = 0\} \\ &= f(\sigma). \end{aligned}$$

თუ განვიხილავთ ენდომორფიზმების მონოიდს M_K და ყველა მაკნოტონის ფუნქციებს $[0, 1]^K$ -ზე როგორც ერთ-ობიექტიან კატეგორიას, ჩვენ ტრივიალურად ვამოწმებთ, რომ $*$ არის კონტრა ვარიანტული იზომორფიზმი. შეზღუდვით ინვერტირებული მორფიზმებზე, ჩვენ მივიღებთ ანტი იზომორფიზმს M_K ავტომორფიზმების ჯგუფსა და მაკნოტონის ჰომომორფიზმების ჯგუფს $[0, 1]^K$ შორის.

უკვე ჩვენ შეგვიძლია დავახასიათოთ მაკნოტონის ჰომომორფიზმები. გავიხსენებთ, რომ n -უჯრედი არის კომპაქტური ამოზნექილი პოლიედრონი k აფინური განზომილებით. ფიქური კომპლექსი W წარმოადგენს უჯრედების სასრულ სიმრავლეს ისეთებს, რომ:

1. თუ W შეიცავს უჯრედ B , მაშინ იგი შეიცავს B -ს ყველა წახნაგს;
2. W -ს ყოველი ორი უჯრედი თანაკვეთება საერთო წახნაგით.

თეორემა 3.3.3 [74] დავუშვათ, რომ $n \geq 1$ და $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ არის ინექციური და უწყვეტი. მაშინ f არის მაკნოტონის ჰომომორფიზმი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობა:

არსებობს ფიქური კომპლექსი W , რომლის n -უჯრედები არის $B_1, \dots, B_k$, და არსებობს $(n+1) \times (n+1)$ მატრიცები $P_1, \dots, P_k$ ინტეგრალური ჩანაწერებით, ისეთი, რომ:

1. $B_1, \cup \dots \cup B_k = [0, 1]^n$;
2. $P_1, \dots, P_k$ აქვს ყველა დეტერმინანტი $+1$, ან ყველა დეტერმინანტია -1 ;
3. ყოველი P_j გააჩნია შემდეგი სახის ბოლო

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4. P_j გამოსახავს $f|_{B_j} - s$ ერთგვაროვან კოორდინატებში (ე.ი, თუ $\sigma = (s_1, \dots, s_n) \in B_j$ და $f(\sigma) = (r_1, \dots, r_n)$, მაშინ $(r_1, \dots, r_n, 1) = (s_1, \dots, s_n, 1) P_j$).

დავუშვათ, რომ f არის მაკნოტონის ჰომომორფიზმი და μ აღნიშნავს ლებეგის ზომას. მაშინ ნებისმიერი ზომადი U ქვესიმრავლესათვის $[0, 1]^n$ -დან, ჩვენ გვაქვს $\mu(f(U)) = \mu(U)$; ეს გამომდინარეობს P_j მატრიცების უნიმოდულარობიდან.

მაგალითი 3.3.4 M_1 - ის ერთადერთი ავტომორფიზმები არის იგივეური და $x \mapsto \neg x$.

სინამდვილეში, ნებისმიერი სეგმენტის სიგრძე ნარჩუნდება ყველა მაკნოტონის ჰომომორფიზმი f -ით. თუ $f(0) = 0$, მაშინ f არის იგივეური ფუნქცია. თუ $f(0) = 1$, მაშინ $f(\sigma) = 1 - \sigma$ ნებისმიერი $\sigma \in [0, 1]$, და, მაშასადამე, $f^*: x \mapsto \neg x$.

გაზომვის გარდა, მაკნოტონის ჰომომორფიზმი ინარჩუნებს მნიშვნელებს. დავუშვათ, რომ $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ არის წერტილი $[0, 1]^n$ -დან რაციონალური კოორდინატით. არსებობს ცალსახად განსაზღვრული ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვებისა $b_1, \dots, b_{n+1}$ ისეთი, რომ $b_{n+1} \geq 1$ და $s_i = b_i / b_{n+1}$, ყველა $i = 1, \dots, n$. ჩვენ ვამბობთ, რომ b_{n+1} არის σ -ს მნიშვნელი, და ჩვენ განვსაზღვრავთ $[0, 1]^n$ -ს k -ბადეს Gr_k , როგორც ყველა რაციონალური რიცხვების სიმრავლეს $[0, 1]^n$ -დან მოცემული მნიშვნელით k . ყოველი მაკნოტონის ჰომომორფიზმი ინდუცირებს, ნებისმიერი k - სთვის, გადანაცვლებას k -ბადედან თავის თავში. დავუშვათ G არის მაკნოტონის ჰომომორფიზმების ჯგუფი $[0, 1]^n$ -ზე. ყოველი k -თვის, ჩვენ გვაქვს ბუნებრივი ჰომომორფიზმი: $G \rightarrow \text{Sym}(Gr_k)$; H_k იყოს ბირთვი. უწყვეტობით, ყველა H_k -ს თანაკვეთა არის იგივეური ფუნქცია, ასე რომ G არის რეზიდუალურად სასრული. დავუშვათ

I_{k+1} არის I -ს ქვეალგებრა წარმოებული $1/k$ -თი. მაშინ $M_n \mid Gr_k$ არის თავისუფალი MV -ალგებრა n წარმომქმნელებით MV -ს ქვემრალსახეობაში წარმოქმნილ I_{k+1} -თი, და მნიშვნელის შენარჩუნებას უბრალოდ ნიშნავს იმას, რომ ყოველი ავტომორფიზმი M_n – ში იდუცირებს ავტომორფიზმს $M_n \mid Gr_k$ -ში. არ არსებობს, რომ ყოველი ავტომორფიზმი $M_n \mid Gr_k$ გავრცელებადია ავტომორფიზმი M_n -ზე; ეს მარტივად გამომდინარეობს მაგალითიდან 3.3.4. თუ ავიღებთ, $n = 1$ და $k = 3$.

4. დასკვნა

ახლა ჩვენ ვცდილობთ შევაჯამოთ ჩვენი მსჯელობა და ასევე შევაჯამოთ განმასხვავებელი ნიშანი მრავალნიშნა ლოგიკისა.

უპირველესყოვლისა, ჩვენ ვფიქრობთ, რომ მრავალნიშნა ლოგიკა არის მათემატიკური საინტერესო თეორია, შედარებით ღრმა თეორემებით და კავშირებით მათემატიკის სხვა დარგებთან. ზოგიერთი კავშირებიდან უტყუარად წარმოდგენილია §3-ში; კავშირი მესერთა თეორიასთან და უნივერსალურ ალგებრასთან ყველგანაა, მაშინ როდესაც კავშირების კლასიფიკაცია მიეკუთვნება ფუქციათა ტოლობებს.

მეორე მხრივ, ზოგიერთი კლასიკური ლოგიკის ცნებების დაზუსტება ხდება მრავალნიშნა გაფართოებებით. ასეთი პრობლემები მოიცავენ კვანტორების როლს, შემოყვანის-ელიმინაციის წესს კავშირებისთვის, უარყოფის წესს.

რაც შეეხება უარყოფას, ახლა ჩვენ იძულებულნი ვართ განვასხვავოთ მრავალი შემთხვევები არათავსებადობის / წინააღმდეგობრივობის Γ ფორმულათა სიმრავლისათვის:

1. შემთხვევა, რომელშიც ყოველი ფორმულა შეიძლება იყოს მიღებული Γ – დან;
2. შემთხვევა, როცა Γ ამტკიცებს ფორმულა A -ს მის უარყოფასთან ერთად $\neg A$;
3. შემთხვევა, რომელშიც Γ ამტკიცებს კონკრეტულ ფორმულას (ან ფორმულების სიმრავლეს), რომელიც გამოხატავს მცდარობას.

კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია გვქონდეს ლოგიკა, რომელშიც წინააღმდეგობრიობა არ გულისხმობს არათავსებადობას, ე.ი., რომელშიც (2) სრულდება, მაგრამ არა (1). ასეთი ლოგიკა არის, მაგალითად, ბელნაპის ლოგიკა, ან მუნდიჩის ფორმალიზაცია ულამის თამაშისა სიცრუესთან ერთად. ახალი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობების შემოტანა ასევე იყო შემოთავაზებული, ალტერნატივად უარყოფა-როგორც-ჩამოშლა ლოგიკურ პროგრამირებაში [20]. ჩვენ, ვთვლით, რომ ეს მესამე აღსანიშნავი თვისებაა.

მეოთხე თვალსაზრისით, ჩვენ ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ მრავალნიშნა ლოგიკა იძლევა მუშაობის საშუალებას ჭეშმარიტების ფუნქციებით არამკაფიო მტკიცებულებებით, წარმოდგენა სრული ინფორმაციის. გავიხსენოთ განსხვავება ჭეშმარიტობის ხარისხებს შორის ("ცა არის უფრო ლურჯი") და რწმენის ხარისხი ("ჩვენ დარწმუნებული ვართ, რომ ხვალარ იქნება წვიმა"). პირველ განცხადებაში გავლენას არ ახდენს ინფორმაციის გაზრდაზე, იმ დროს როდესაც მეორეზე კი. თუმცა რწმენა და ალბათობა არ არიან ჭეშმარიტობის ფუნქციები, ჭეშმარიტობა შეიძლება იყოს წარმოდგენილი ჭეშმარიტობის ფუნქციით. მას შემდეგ რაც ეს განსხვავება ცხადია, ჩვენ შეიძლება მივიღოთ სკოტის ინტერპრეტაციით

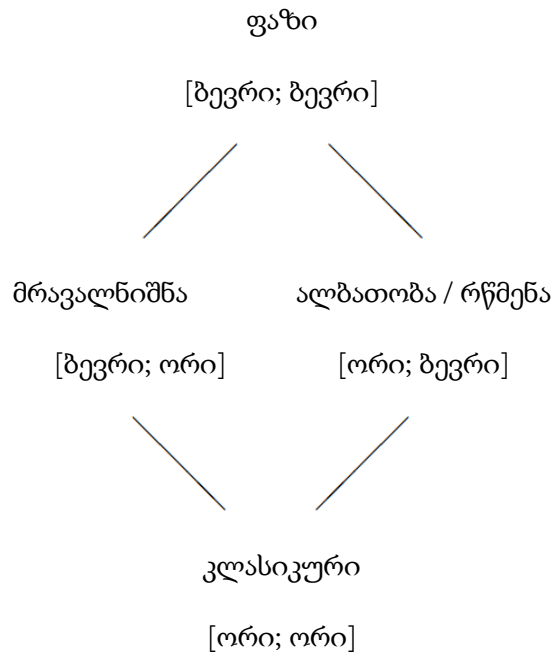
ლუკასევიჩის კავშირები, იმ პირობით, რომ ჩვენ წავიკითხავთ მცდარობის ხარისხს შეცდომის ხარისხად. შეხედეთ კიდევერთხელ იმპლიკაციას: $A \rightarrow B$ ახლა ბუნებრივად ნიშნავს "B იმავე დონის ჭეშმარიტია როგორც A". აქედან გამომდინარე, $A \rightarrow B$ -ს მცდარობის ხარისხი σ -ს მდგომარეობის სიტუაციებში არის უბრალო სიდიდე, რომლითაც $\sigma(A)$ დომინირებს $\sigma(B)$ -ზე: სიმბოლოებში

$$\sigma(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1, & \text{if } \sigma(A) \leq \sigma(B); \\ 1 - (\sigma(A) - \sigma(B)), & \text{otherwise;} \end{cases}$$

რაც არის ლუკასევიჩის იმპლიკაცია. ჩვენ უკვე ვნახეთ, მიღებული არა-იდემპოტენტურობის შედეგი $\oplus$ -ს და $\otimes$ -ს შეიძლება იყოს სასურველი სახე. გავითვალისწინოთ, რომ ჩვენ არვამტკიცებთ, რომ ვიცით რა არის ჭეშმარიტობის ხარისხი და რა ჭეშმარიტობის ფუნქცია უნდა განეკუთვნოს მას. ჩვენ უბრალოდ ვამბობთ, რომ არსებობს მტკიცებულებები, რომლებსაც ეს მნიშვნელობა შეიძლება მივანიჭოთ, განსხვავებული {ჭეშმარიტი, მცდარი}-გან და რაც ზოგჯერ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ გავრცელების წესი ამ ნიშნებისთვის.

მოდით განვიხილოთ მაგალითი: განვიხილოთ არტ კრიტიკა, ექსპერტის მწარმოებელი პიეტრო დელა ფრანჩესკო. მას აქვს დეტალური ინფორმაცია პიეტროს ნახატების შესახებ და სრულებით ენდობა მხატვრის სტილს. ახალი ნამუშევარი აღმოჩენილია, რომლის მიმართულება გაურკვეველია. როგორ მუშაობს კრიტიკოსი? ჩვენ შეგვიძლია ფორმალიზება მოვახდინოთ სიტუაციისა იმის განცხადებით, რომ კრიტიკოსის ცოდნა მიეკუთვნება მონაცემთა ბაზას Ω , რომელიც ახალი სურათის განხილვისას ის აყალიბებს მეორე მონაცემთა ბაზას ω , და ის წყვეტს მიკუთვნების შეკითხვას Ω და ω დაპირისპირებით. ნაწილობრივ ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს ორი მონაცემთა ბაზა, თითქმის არ არის რიცხობრივი ან ბულიანი. უფრო ეს გამოიხატება მტკიცებულების ფორმაში როგორიცაა "ამგარემოებებში, პიეტრო მიდრეკილია გამოიყენოს ეს ფერი" ან "ხელების ნახატი ტიპიურია". მტკიცებულების ეს ტიპი ყველაზე უფრო არის წარმოდგენილი, როგორც ფაზი პრედიკატი განსაზღვრულს სიმრავლეზე, როგორც განსაზღვრულია §2.6-ში. შედარებას მოჰყავს გასაშუალოების პროცესი, და მისი გამოყვანა არის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა. ავლნიშნოთ, რომ რიცხვითი პასუხი 0 და 1 არის გამართლებული და შეიძლება გარდაუვალიც: მართლაც ბევრი ნახატი პიეტროს დროს სამაგისტრო სკოლის ნამუშევრებია, მხატვარი ხატავს მხოლოდ მთავარ ფიგურებს. შევნიშნოთ ასევე ინფორმაციის ის ნაწილი რომელიც ეკუთვნის Ω -ს, შეიძლება გამოწვეული იყოს საეჭვო მიკუთვნების სამუშაოებიდან. თუ ასეა, Ω არის მასზე მოქმედებს შემდგომი აპროქსიმაციის დონე, და საბოლოო პასუხად ასეთი რამ იქნებოდა: "ეს სიმართლესთან ახლოსაა, რომ ეს ნამუშევარი ძირითადად დაკავშირებულია პიეტროსთან". შემდეგ თავში ჩვენ გვაქვს ფორმულის გამოყვანა [ძირითადად ავთენტური (სურათი); დასაბუთებული].

ჩვენი მაგალითის ეს გაფართოება მივყავართ ჩვენს საბოლოო პუნქტთან: მრავალნიშნა ლოგიკა იძლევა თეორიულ საფუძველს ფაზი ლოგიკისათვის ვიწრო გაგებით. ჩვენ ვგულისხმობთ შემდეგ სურათს:



მიზანშეწონილია ვიფიქროთ ფაზი ლოგიკაზე, როგორც მრავალნიშნა ლოგიკაზე, რომელშიც განუზღვრელობა მიგრირებს ფაქტებიდან განცხადებებზე ფაქტების შესახებ, ანუ ენიდან მეტა ენამდე; შეფასებულ ფორმულაში აღნიშვნა მარცხნიდან მარჯვნივ ";". ფაზილოგიკაში მომუშავე ადამიანებმბს შეუძლიათ მიიღონ სარგებელი ახლანდელ დროში ჩამოყალიბებული მრავალნიშნა ლოგიკის მეთოდებიდან; იმისათვის რომ მოვიყვანოთ მაგალითი, პაველკას დამტკიცების ორიგინალი [77] სისრულის თეორემისა ფაზი ლოგიკისათვის იყო სწრაფად გამარტივებული [43]-ში კლასიკურ სისრულის თეორიით ლუკასევიჩის ლოგიკისათვის.

დამხმარე ლიტერატურა:

- [1] A. Avron. Natural 3-valued logics—characterization and proof theory. *J. of Symbolic Logic*, 56(1):276–294, 1991.
- [2] M. Baaz and C. G. Fermüller. Resolution-based theorem proving for many-valued logics. *J. Symbolic Computation*. To appear.
- [3] M. Baaz, C. G. Fermüller, and R. Zach. Elimination of cuts in first-order finite-valued logics. *J. Informat. Process. Cybernet.*, EIK 29(6):333–355, 1993.
- [4] M. Baaz and R. Zach. Approximating propositional calculi by finite-valued logics. In *Proc. International Symposium on Multiple-Valued Logics, ISMVL'94, Boston/MA, USA*. IEEE Press, Los Alamitos, 1994.
- [5] R. Balbes and Ph. Dwinger. *Distributive Lattices*. University of Missouri Press, 1974.
- [6] N. D. Belnap, Jr. A useful four-valued logic. In Dunn and Epstein [25], pages 5–37.
- [7] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein. *Groupes et anneaux réticulés*, volume 608 of *Lecture Notes in Math*. Springer, 1977.
- [8] U. Blau. *Die dreiwertige Logik der Sprache; ihre Syntax, Semantik und Anwendung in der Sprachanalyse*. De Gruyter, Berlin, 1978.
- [9] A. Blikle. Three-valued predicates for software specification and validation. *Fund. Inf.*, 14:387–410, 1991.

- [10] W. J. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable logics*, volume 77 n. 396 of *Mem. Amer. Math. Soc.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [11] D. A. Bochvar. Ob odnom trékhznačnom isčislénii égo priménénii k analizu paradoksov klassičeskogo rassirénnoho funkcional'nogo isčislénia (On a 3-valued logical calculus and its applications to the analysis of contradictions). *Matématičeskij sbornik*, 4:287–308, 1939.
- [12] L. Bolc and P. Borowik. *Many-Valued Logics, I*. Springer, 1992. Reviewed in [45].
- [13] W. A. Carnielli. Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux. *J. of Symbolic Logic*, 52(2):473–493, 1987.
- [14] W. A. Carnielli. On sequents and tableaux for many-valued logics. *J. Appl. Non-Classical Logics*, 8(1):59–76, 1991.
- [15] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.
- [16] C. C. Chang. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:74–80, 1959.
- [17] A. Church. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, 1956.
- [18] R. Cignoli. Free lattice-ordered abelian groups and varieties of MV-algebras. In Abad M., editor, *Proceedings IX Latin America Symp. Math. Logic*, volume 38 of *Notas de Lógica Matemática*, pages 113–118. Univ. National del Sur, Bahia Blanca, 1993.
- [19] R. Cignoli, I. D'Ottaviano, and D. Mundici. *Algebras das logicas de Łukasiewicz*. Centro de Logica, Epistemologia e Historia da Ciência, Campinas, Brazil, 1994.
- [20] J. P. Delahaye and V. Thibau. Programming in three-valued logic. *Theoret. Comp. Sci.*, 78:189–246, 1991.
- [21] A. Di Nola. Representation and reticulation by quotients of MV-algebras. *Ricerche di Matematica*, 40(2):291–297, 1991.
- [22] R. P. Dilworth and M. Ward. Residuated lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45:335–354, 1939.
- [23] P. Doherty and W. Łukasiewicz. NML3—a nonmonotonic logic with explicit default. *J. Appl. Non-Classical Logics*, 2(1):9–48, 1992.

- [24] M. Dummett. A propositional calculus with denumerable matrix. *J. of Symbolic Logic*, 24(2):97–106, 1959.
- [25] J. M. Dunn and G. Epstein, editors. *Modern uses of multiple-valued logic*. Reidel, Dordrecht, 1977.
- [26] P. Dwyer. A survey of the theory of Post algebras and their generalizations. In Dunn and Epstein [25], pages 53–75.
- [27] G. Epstein. The lattice theory of Post algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:300–317, 1960.
- [28] M. Fitting. Bilattices in logic programming. In *Proc. 20th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pages 238–246. IEEE Press, 1990.
- [29] M. Fitting. Bilattices and the semantics of logic programming. *J. Logic Programming*, 11(1,2):91–116, 1991.
- [30] M. C. Fitting. Many-valued modal logic. *Fund. Inf.*, 15:235–254, 1991.
- [31] M. C. Fitting. Many-valued modal logic II. *Fund. Inf.*, 17:55–73, 1992.
- [32] R. R. R. Gill. The Craig-Lyndon interpolation theorem in 3-valued logic. *J. of Symbolic Logic*, 35:230–238, 1970.
- [33] M. L. Ginsberg. Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence. *Comput. Intell.*, 4:265–316, 1988.
- [34] K. Gödel. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. In *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 1933. Reprinted in [35].
- [35] K. Gödel. *Collected Works*. Oxford University Press, 1986.
- [36] S. Gottwald. *Mehrwertige Logik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1989.
- [37] R. Grigolia. Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski’s n -valued logical systems. In Wójcicki and Malinowski [110], pages 81–92.

- [38] R. Hähnle. Tableau for many-valued logic. In M. D'Agostino, D. Gabbay, R. Hähnle, and J. Posegga, editors, *Handbook of Tableau Methods*. Kluwer, Dordrecht. To appear.
- [39] R. Hähnle. Towards an efficient tableau proof procedure for multiple-valued logics. In E. Börger, H. Kleine Büning, M. M. Richter, and W. Schönfeld, editors, *Selected Papers from Computer Science Logic, CSL'90, Heidelberg, Germany*, volume 533 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 248–260. Springer, 1991.
- [40] R. Hähnle. *Automated Deduction in Multiple-Valued Logics*. Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [41] R. Hähnle. Short conjunctive normal forms in finitely-valued logics. *Journal of Logic and Computation*, 4(6):905–927, 1994.
- [42] R. Hähnle and W. Kernig. Verification of switch level designs with many-valued logic. In A. Voronkov, editor, *Logic Programming and Automated Reasoning. Proceedings LPAR'93*, number 698 in *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 158–169. Springer, 1993.
- [43] P. Hájek. Fuzzy logic and arithmetical hierarchy. *Fuzzy sets and systems*. To appear.
- [44] P. Hájek, L. Godo, and F. Esteva. A complete many-valued logic with product-conjunction. *Arch. Math. Logik Grundlag*. To appear.
- [45] P. Hajek and R. Zach. Review of Leonard Bolc and Piotr Borowik: Many-valued logics I. *J. Appl. Non-Classical Logics*, 4(2):215–220, 1994.
- [46] M. Hanazawa and M. Takano. An interpolation theorem in many-valued logic. *J. of Symbolic Logic*, 51(2):448–452, 1985.
- [47] L. S. Hay. Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus. *J. of Symbolic Logic*, 43:76–77, 1963.
- [48] S. Jaskowski. Recherches sur le système de la logique intuitioniste. In Hermann & Cie, editor, *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, vol. 4, Philosophie des Mathématiques*, pages 58–61, 1936.
- [49] Y. Kaluzhny and A. Y. Muravitsky. A knowledge representation based on the Belnap's four-valued logic. *J. Appl. Non-Classical Logics*, 1993.
- [50] Y. Kawano. On the structure of complete MV-algebras. *J. of Algebra*, 163:773–776, 1994.
- [51] S. C. Kleene. On a notation for ordinal numbers. *J. of Symbolic Logic*, 3:150–155, 1938.
- [52] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand, 1952.
- [53] S. Körner, editor. *Philosophy of logic*. Blackwell, Oxford, 1976.
- [54] J. Łoś and R. Suszko. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae*, 20:177–183, 1958.
- [55] J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch Filozoficzny*, 5:169–171, 1920. Translated in [58].
- [56] J. Łukasiewicz and A. Tarski. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 23(iii):30–50, 1930. Translated in [101].
- [57] G. Malinowski. *Many-Valued Logics*. Oxford University Press, 1993.
- [58] S. McCall. *Polish Logic 1920–1939*. Oxford University Press, 1967.
- [59] R. McNaughton. A theorem about infinite-valued sentential logic. *J. of Symbolic Logic*, 16:1–13, 1951.
- [60] J. Menu and J. Pavelka. A note on tensor products on the unit interval. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 17:71–83, 1976.
- [61] T. Miyama. The interpolation theorem and Beth's theorem in many-valued logics. *Mathematica Japonica*, 19:341–355, 1974.

- [62] C. G. Morgan. A resolution principle for a class of many-valued logics. *Logique et Analyse*, 19(74–76):311–339, 1976.
- [63] O. Morikawa. Some modal logics based on a three-valued logic. *Notre Dame J. of Formal Logic*, 30(1):130–137, 1989.
- [64] A. Mostowski. On a generalization of quantifiers. *Fund. Math.*, 44:12–36, 1957.
- [65] D. Mundici. Interpretation of AF C^* -algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *J. of Functional Analysis*, 65:15–63, 1986.
- [66] D. Mundici. Satisfiability in many-valued sentential logic is NP-complete. *Theoret. Comp. Sci.*, 52:145–153, 1987.
- [67] D. Mundici. The logic of Ulam’s game with lies. In C. Bicchieri and M. L. Dalla Chiara, editors, *Knowledge, Belief and Strategic Interaction*, Cambridge Studies in Probability, Induction and Decision Theory, pages 275–284. Cambridge University Press, 1989.
- [68] D. Mundici. Ulam games, Łukasiewicz logic, and AF C^* -algebras. *Fund. Inf.*, 18:151–161, 1993.
- [69] D. Mundici. A constructive proof of McNaughton’s theorem in infinite-valued logic. *J. of Symbolic Logic*, 59:596–602, 1994.
- [70] D. Mundici and G. Panti. Extending addition in Elliott’s local semigroup. *J. of Functional Analysis*, 117(2):461–472, 1993.
- [71] N. V. Murray and E. Rosenthal. Signed formulas: A liftable meta logic for multiple-valued logics. In *Proceedings ISMIS’93, Trondheim, Norway*, volume 689 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 275–284. Springer, 1993.
- [72] E. Orłowska. Mechanical proof methods for Post Logics. *Logique et Analyse*, 28(110):173–192, 1985.
- [73] P. Ostermann. Many-valued modal propositional calculi. *Z. math. Logic Grundlag. Math.*, 34:343–354, 1988.
- [74] G. Panti. The logic of partially ordered abelian groups with strong unit. In *Atti del XV Incontro di Logica Matematica di Camerino*, pages 85–107. 1992.
- [75] G. Panti. A geometric proof of the completeness of the Łukasiewicz calculus. *J. of Symbolic Logic*, 60(2):563–578, 1995.
- [76] J. B. Paris. *The Uncertain Reasoner’s Companion—a Mathematical Perspective*. Cambridge University Press, 1994.
- [77] J. Pavelka. On fuzzy logic I,II,III. *Z. math. Logic Grundlag. Math.*, 25:45–52,119–134,447–464, 1979.
- [78] E. L. Post. Introduction to a general theory of propositions. *Amer. J. Math.*, 43:163–185, 1921. Reprinted in [105].
- [79] M. E. Ragaz. *Arithmetische Klassifikation von Formelmengen der unendlichwertigen Logik*. PhD thesis, ETH Zürich, 1981.
- [80] H. Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics*. Number 78 in Studies in Logic. North Holland, 1974.
- [81] N. Rescher. *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill, 1969.
- [82] A. Rose and J. B. Rosser. Fragments of many-valued sentential calculus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87:1–53, 1958.
- [83] J. B. Rosser and A. R. Turquette. *Many-valued Logics*. North-Holland, 1952.
- [84] G. Rousseau. Sequents in many-valued logic I. *Fund. Math.*, 60:23–33, 1967.

- [85] B. Scarpellini. Die Nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Łukasiewicz. *J. of Symbolic Logic*, 27(2):159–170, 1962.
- [86] P. K. Schotch, J. B. Jensen, P. F. Larsen, and E. J. Maclellan. A note on three-valued modal logic. *Notre Dame J. of Formal Logic*, 14:63–68, 1978.
- [87] D. Scott. Does many-valued logic have any use? In Körner [53], pages 64–74.
- [88] P. A. M. Seuren. *Discourse Semantics*. Blackwell, Oxford, 1985.
- [89] R. M. Smullyan. *First-Order Logic*. Dover, 2nd corrected edition, 1995. First published 1968 by Springer.
- [90] T. P. Speed. A note on Post algebras. *Colloq. Math.*, 24:37–44, 1971.
- [91] Z. Stachniak. Nonmonotonic theories and their axiomatic varieties. *J. of Logic, Language, and Information*. To appear.
- [92] Z. Stachniak. *Resolution Proof Systems: an Algebraic Theory*. To appear in the *Automated Reasoning Series*, Kluwer.
- [93] Z. Stachniak. Extending resolution to resolution logics. *J. of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, 3:17–32, 1991.
- [94] Z. Stachniak. Algebraic semantics for cumulative inference operations. In *Proceedings of the AAAI'93*, pages 444–449, 1993.
- [95] Z. Stachniak and P. O'Hearn. Resolution in the domain of strongly finite logics. *Fund. Inf.*, 13:333–351, 1990.
- [96] W. Suchoń. La méthode de Smullyan de construire le calcul n -valent de Łukasiewicz avec implication et négation. *Reports on Mathematical Logic, Universities of Cracow and Katowice*, 2:37–42, 1974.
- [97] S. J. Surma. An algorithm for axiomatizing every finite logic. In D. C. Rine, editor, *Computer Science and Multiple-valued Logic: Theory and Applications*, pages 137–143. North-Holland, 1977.
- [98] M. Takahashi. Many-valued logics of extended Gentzen style I. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku*, 9:271–292, 1967.
- [99] M. Takahashi. Many-valued logics of extended Gentzen style II. *J. of Symbolic Logic*, 35(4):493–528, 1970.
- [100] M. Takano. Subformula property in many-valued modal logics. *J. of Symbolic Logic*, 59(4):1263–1273, 1994.
- [101] A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford University Press, 1956. Reprinted by Hackett Publ. Co., Indianapolis, 1981.
- [102] S. K. Thomason. Possible worlds and many truth values. *Studia Logica*, 37:195–204, 1978.
- [103] A. Torrens. W-algebras which are Boolean products of members of $SR[1]$ and CW-algebras. *Studia Logica*, 46(3):265–274, 1987.
- [104] A. Urquhart. Many-valued logic. In *Handbook of Philosophical Logic*, volume III, pages 71–116. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [105] J. van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1967.
- [106] A. Wasilewska. A constructive proof of Craig's interpolation lemma for m -valued logic. *Studia Logica*, 38(3):267–275, 1979.
- [107] V. Weispfenning. Model theory of abelian ℓ -groups. In A. M. W. Glass and W. C. Holland, editors, *Lattice-Ordered Groups*, pages 41–79. Kluwer, 1989.
- [108] R. Wójcicki. Some remarks on the consequence operation in sentential logic. *Fund. Math.*, 68:269–279, 1970.

- [109] R. Wójcicki. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Kluwer, 1988.
- [110] R. Wójcicki and G. Malinowski, editors. *Selected papers on Łukasiewicz sentential calculus*. Polish Academy of Sciences, Ossolineum, Wrocław, 1977.
- [111] R. G. Wolf. A survey of many-valued logic. In Dunn and Epstein [25], pages 167–323.
- [112] A. Wroński. On the cardinalities of matrices strongly adequate for the intuitionistic propositional logic. *Reports on Mathematical Logic*, 3:67–72, 1974.
- [113] A. Wroński. Remarks on a survey article on many valued logic by A. Urquhart. *Studia Logica*, 46(3):175–178, 1987.
- [114] R. Zach. Proof theory of finite-valued logic. Master’s thesis, Technische Universität Wien, 1993.