

ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია ხაჩიძე

„მეორე რიგის გადახრილ არგუმენტიანი სხვაობიანი განტოლების
რხევადობა“

მათემატიკის დეპარტამენტი

დოქტორანტის სემინარი 2

ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე, ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის

თბილისი 2020

სარჩევი

რეზიუმე-----	3
შესავალი-----	4
დამხმარე ლემები-----	5
მთავარი შედეგები-----	8
ლიტერატურა-----	14

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება გადახრილი არგუმენტით. დადგენილია საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ განტოლების

$$\Delta^{(2)}u(k) + \sum_{j=1}^m p_j(k)u(\tau_j(k)) = 0$$

ყოველი ამონახსნი რხევადია. სადაც $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, $\Delta^{(2)} = \Delta \circ \Delta$ და p_j ($j = 1, \dots, m$) არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა arbitrary მიმდევრობაა. აღვნიშნოთ, რომ τ_j აკმაყოფილებს პირობას $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tau_j(k)}{k} > 0$ ($j = 1, \dots, m$). როცა $m = 1$ და $\tau_1(k) \equiv k$ მივიღებთ კარგად ცნობილ ჰილის რხევადობის თეორემის დისკრეტულ ანალოგს.

Abstract

Sufficient conditions with guarantee the oscillation of all solutions to the difference equation

$$\Delta^{(2)}u(k) + \sum_{j=1}^m p_j(k)u(\tau_j(k)) = 0$$

are established. Where $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, $\Delta^{(2)} = \Delta \circ \Delta$ and the coefficients p_j ($j = 1, \dots, m$) are arbitrary sequences of nonnegative real numbers. It is to be emphasized that the deviations τ_j are subject to the restriction $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tau_j(k)}{k} > 0$ ($j = 1, \dots, m$) only. In the case when $m = 1$ and $\tau_1(k) \equiv k$, a discrete analogue of the well known Hille's oscillation theorem is obtained.

1. შესავალი

განვიხილოთ განტოლება

$$\Delta^{(2)}u(k) + \sum_{j=1}^m p_j(k)u(\tau_j(k)) = 0 \quad (1.1)$$

სადაც $m \geq 1$ ნატურალური რიცხვია, $p_j: \mathbb{N} \rightarrow [0; +\infty)$, $\tau_j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ($j = 1, \dots, m$) ფუნქციები განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, და $\Delta^{(2)} = \Delta \circ \Delta$.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_j(k) = +\infty \quad (j = 1, \dots, m), \quad (1.2)$$

$$\sup\{p_j(i) : i \geq k\} > 0 \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (1.3)$$

ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის $N_n = \{n, n+1, \dots\}$.

განმარტება 1.1. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის $n_0 = \min\{\tau_j(k) : k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m\}$. ვიტყვით, რომ $u: N_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}$ არის წესიერი ამონახსნი (1.1) განტოლების თუ ის აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას N_n -ზე და

$$\sup\{|u(i)| : i \geq k\} > 0 \quad \text{როცა } k \in N_{n_0}.$$

განმარტება 1.2. ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ რხევადია, თუ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის არსებობს $n_1, n_2 \in N_n$ ისეთი, რომ $u(n_1)u(n_2) \leq 0$. სხვა შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ამონახსნი არარხევადია.

ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

$$\sum_{j=1}^{+\infty} k \sum_{j=1}^m p_j(k) = +\infty \quad (1.4_1)$$

და

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^m \tau_j(k) p_j(k) = +\infty. \quad (1.4_2)$$

უკანასკნელი ორი პირობიდან თითოეული აუცილებელი პირობაა იმისათვის, რომ (1.1) განტოლება იყოს რხევადი.

დამხმარე ლემები

ლემა 2.1. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ ნამდვილი სასრული მიმდევრობები და $A_i = \sum_{j=1}^i a_j$. მაშინ

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

ლემა 2.2. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$ უსასრულო მიმდევრობები, ვთქვათ მწკრივი $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ კრებადია, ხოლო $a_i b_{i+1} \rightarrow 0$, როცა $i \rightarrow +\infty$, სადაც $B_i = \sum_{j=i}^{+\infty} b_j$. მაშინ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i$ და $\sum_{i=2}^{+\infty} (a_i - a_{i-1}) B_i$ მწკრივებიდან ერთერთის კრებადობიდან გამომდინარეობს მეორეს კრებადობა და

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i = a_1 B_1 + \sum_{i=2}^{+\infty} (a_i - a_{i-1}) B_i.$$

ლემა 2.3. ვთქვათ $u: \mathbb{N}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}$ არარხევადი წესიერი ამონახსნია (1.1) განტოლების. მაშინ არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}_{n_0}$ ისეთი რომ

$$u(k) \Delta u(k) > 0 \quad k \in \mathbb{N}_{k_0} - \text{თვის.} \quad (2.1)$$

დამტკიცება: ზოგადობის შეუძლურდავად ვიგულისხმობთ, რომ $u(k) > 0 \quad k \in \mathbb{N}_{k_1} -$ თვის, სადაც $k_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ საკმარისად დიდია. (1.2)-ის თანახმად არსებობს $k_0 \geq k_1$ ისეთი, რომ $u(\tau_j(k)) > 0 \quad k \in \mathbb{N}_{n_0} - \text{თვის } (j = 1, \dots, m)$. (1.1)-დან გამომდინარე (1.3)-ის თანახმად გვაქვს

$$\Delta u(k) \geq \sum_{i=k}^{+\infty} \sum_{j=1}^m p_j(i) u(\tau_j(i)) > 0 \quad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}.$$

ამიტომ სრულდება (2.1).

ლემა 2.4. ვთქვათ (1.4₁), (1.5) სრულდება და $u: \mathbb{N}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}$ (1.1) განტოლების არარხევადიამონახსნია, მაშინ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u(k)| = +\infty, \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u(k)|}{k} < +\infty. \quad (2.2)$$

დამტკიცება: ლემა 2.3-ის გათვალისწინებით (1.1)-დან მივიღებთ

$$|u(k)| \geq \sum_{l=k_0}^{k-1} \sum_{i=l}^{\infty} \sum_{j=1}^m p_j(i) |u(\tau_j(i))| \quad \text{როცა} \quad k \geq k_0, \quad (2.3)$$

სადაც $k_0 \in \mathbb{N}$ საკმარისად დიდი რიცხვია. ლემა 2.1 – ით (2.3) – დან ვღებულობთ

$$|u(k)| \geq (k - k_0) \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=1}^m p_j(i) |u(\tau_j(i))| + \sum_{l=k_0}^{k-1} (l - k_0 + 1) \sum_{j=1}^m p_j(l) |u(\tau_j(l))|.$$

რადგან $u(\tau_j(l)) \geq c > 0 \quad l \in \mathbb{N}_{k_0}$ – თვის ($j = 1, \dots, m$), (1.4₁)-დან მივიღებთ, რომ უკანასკნელი უტოლობის მეორე შესაკრები მისწრაფვის $+\infty$, როცა $k \rightarrow +\infty$. ე.ი მივიღეთ (2.2)-ის პირველი პირობა.

(2.2)-ის მეორე პირობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ

$$\Delta \left(\frac{u(k)}{k} \right) = \frac{u(k+1)}{k+1} - \frac{u(k)}{k} = \frac{k(u(k+1) - u(k)) - u(k)}{k(k+1)} = \frac{k\Delta u(k) - u(k)}{k(k+1)}$$

$k \in \mathbb{N}_{n_0}.$

მეორეს მხრივ

$$\Delta(k\Delta u(k) - u(k)) = (k+1)\Delta u(k+1) - (k+1)\Delta u(k) = (k+1)\Delta^2 u(k) \leq 0$$

$k \in \mathbb{N}_{n_0}.$

ამიტომ (2.4)-დან გვაქვს ერთ-ერთი

$$\Delta \left(\frac{u(k)}{k} \right) \geq 0 \quad k \in \mathbb{N}_{n_0} \quad (*)$$

ან

$$\Delta \left(\frac{u(k)}{k} \right) < 0 \quad k \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (**)$$

ვიგულისხმობთ, რომ სრულდება (*) პირობა. მაშინ არსებობს $c \in (0; +\infty)$ ისეთი, რომ $u(k) \geq ck, \quad k \in \mathbb{N}_{n_0}$. მაშინ (1.1)-დან მივიღებთ

$$\Delta u(k_0) \geq c \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=1}^m p_j(k) \tau_j(k),$$

რაც ეწინააღმდეგება (1.4₂). მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ სრულდება (**) პირობა. რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ სრულდება (2.2)-ის მეორე პირობა.

ლემა 2.5. ვთქვათ $\varphi, \psi: \mathbb{N} \rightarrow (0, +\infty)$, ψ არაზრდადია და

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(k) = +\infty, \quad (2.5)$$

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}(k) \psi(k) = 0, \quad (2.6)$$

სადაც $\tilde{\varphi}(k) = \inf\{\varphi(s) : s \geq k, s \in \mathbb{N}\}$. მაშინ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ ისეთი რომ

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(k_i) &= \varphi(k_i), & \psi(k) \tilde{\varphi}(k) &= \psi(k_i) \tilde{\varphi}(k_i) \\ (k &= 1, 2, \dots, k_i, i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.7)$$

დამტკიცება: განვსაზღვროთ სიმრავლე $E_i (i = 1, 2)$ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} k \in E_1 &\Leftrightarrow \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k), \\ k \in E_2 &\Leftrightarrow \tilde{\varphi}(s) \psi(s) \geq \tilde{\varphi}(k) \psi(k) \quad s \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

(2.5) და (2.6) პირობის თანახმად ცხადია, რომ $\sup E_i = +\infty (i = 1, 2)$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\sup E_1 \cap E_2 = +\infty. \quad (2.8)$$

ვთქვათ $k_0 \in E_2$ და $k_0 \notin E_1$. (2.5)-დან არსებობს $k_1 > k_0$ ისეთი, რომ $\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varphi}(k_1) \quad k \in \mathbb{N}_{k_0}$ და $\varphi(k_1) = \tilde{\varphi}(k_1)$. ψ -ის არაზრდადობიდან გვაქვს, რომ

$$\tilde{\varphi}(k) \psi(k) \geq \tilde{\varphi}(k_1) \psi(k_1) \quad k = 1, \dots, k_1.$$

ამიტომ $k_1 \in E_1 \cap E_2$. ეს უკანასკნელი გვიჩვენებს, რომ სრულდება (2.8). ე.ი. ლემა დამტკიცებულია.

ძირითადი შედეგები

შედეგები მიღებულია შემდეგი შეზღუდვისთვის

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tau_j(k)}{k} > \alpha_j \in (0; +\infty) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3.1)$$

თეორემა 3.1. ვთქვათ სრულდება (3.1) პირობა და არსებობს $\theta > 1$ ისეთი, რომ

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} k^{1-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) (\tau_j(i))^\lambda \right) > \theta \lambda \quad (3.2)$$

ყოველი $\lambda \in [0; 1)$. მაშინ (1.1) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: უპირველეს ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ (3.2)-დან ($\lambda = 0$) გამომდინარეობს (1.4₁).

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს არარხევადი ამონახსნი $u: \mathbb{N}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}$ (1.1) განტოლების. 2.3 და 2.4 ლემის თანახმად არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ (2.1) და (2.2) სრულდება. $k \in \mathbb{N}_{k_0}$ –თვის სრულდება (2.3) პირობა.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $k \in \mathbb{N}_{k_0}$ –თვის $\tau_j(k) \geq \tau^*(k)$, სადაც

$$\tau^*(k) = [\alpha k], \quad \alpha = \min \left\{ \frac{\alpha_j}{2}, 1 : j = 1, \dots, m \right\}. \quad (3.4)$$

Λ -თი აღვნიშნოთ სიმრავლე იმ $\lambda \in [0; +\infty)$ –ისა რომლისთვისაც

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u(k)|}{k^\lambda} = +\infty.$$

(2.3) პირობის თანახმად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ ყოველი $\lambda \in \Lambda$ -თვის (3.2)-ის მარცხენა ნაწილში მწკრივი კრებადია. $\lambda_0 = \sup \Lambda$ სასრულია (2.3)-ით და $\lambda_0 \in [0; 1)$. (3.2)-ისა და λ_0 -ის განმარტების თანახმად არსებობს $\varepsilon \in (0; 1)$, $k_1 \geq k_0$ და $\lambda^* \in [0, \lambda_0] \cap [0; 1)$ ისეთი, რომ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u(k)|}{k^\lambda} = +\infty, \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u(k)|}{k^{\lambda^* + \varepsilon}} = 0, \quad (3.5)$$

$$k^{1-\lambda^*} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) (\tau_j(i))^\lambda \right) > (\lambda^* + \varepsilon) \left(\frac{2}{\alpha} \right)^\varepsilon \quad k \in \mathbb{N}_{k_1}. \quad (3.6)$$

მართლაც, დავუშვათ $\lambda_0 > 0$. თუ ε აკმაყოფილებს პირობას

$$0 < \frac{\epsilon \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\epsilon}{\theta - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\epsilon} \leq \frac{\lambda_0}{2},$$

მაშინ გვაქვს $P(\Lambda) > (\lambda + \epsilon) \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\epsilon \lambda \in \left[\frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0\right)$, სადაც $P(\Lambda)$ -თი აღნიშნულია (3.2) პირობის მარცხენა მხარე. მაშინ შეგვიძლია ავარჩიოთ $\lambda^* \in \left[\frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0\right)$ და k_1 ისეთი რომ სრულდება (3.5) და (3.6) პირობები. $\lambda_0 = 0$ შემთხვევა მარტივია, $\lambda^* = \lambda_0 = 0$. საკმარისად დიდი k_1 -თვის (3.1) და (3.4)-ის თანახმად გვაქვს

$$\frac{\tau^*(k)}{k} \geq \frac{2}{3}\alpha \quad k \in \mathbb{N}_{k_1}. \quad (3.7)$$

(3.5)-დან თუ $\varphi(k) \equiv (\tau^*(k))^{-\lambda^*} |u(\tau^*(k))|$ და $\psi(k) \equiv (\tau^*(k))^{-\epsilon}$ სრულდება ლემა 2.5-ის პირობები. ამიტომ არსებობს ზრდადი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=2}^\infty$ ისეთი, რომ

$$\tau^*(k_2) > k_1, \quad (\tau^*(k_i))^{-\epsilon} \tilde{\varphi}(k_i) \leq (\tau^*(k))^{-\epsilon} \tilde{\varphi}(k) \quad k_1 \leq k \leq k_i, \quad (3.8)$$

$$\tilde{\varphi}(k_i) = (\tau^*(k_i))^{-\lambda^*} |u(\tau^*(k_i))| \quad i \geq 2, \quad (3.9)$$

სადაც $\tilde{\varphi}$ განსაზღვრულია ლემა 2.5-ში.

მეორეს მხრივ, როცა $0 < \alpha \leq 1$ გვაქვს $\tau^*(\mathbb{N}_k) = \mathbb{N}_{\tau^*(k)}$. უფრო მეტიც, $\tau_j(k) \geq \tau^*(k)$ საკმარისად დიდი k -თვის. ამიტომ

$$\inf_{i \geq k} \frac{|u(\tau_j(i))|}{(\tau_j(i))^{\lambda^*}} \geq \inf_{i \geq k} \frac{|u(\tau^*(i))|}{(\tau^*(i))^{\lambda^*}} = \tilde{\varphi}(k) \quad (j = 1, \dots, m)$$

საკმარისად დიდი k -თვის.

(2.3)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned} |u(\tau^*(k_i))| &\geq \sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=1}^m p_j(i) |u(\tau_j(i))| \geq \\ &\geq \sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=1}^m p_j(i) (\tau_j(i))^{\lambda^*} \inf_{i \geq k} \frac{|u(\tau^*(i))|}{(\tau^*(i))^{\lambda^*}} = \\ &= \sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} \tilde{\varphi}(k) \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=1}^m p_j(i) (\tau_j(i))^{\lambda^*} \quad i \geq 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ამ უკანასკნელიდან (3.6)-(3.8) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
|u(\tau^*(k_i))| &\geq (\lambda^* + \varepsilon) \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\varepsilon \sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} \tilde{\varphi}(k) k^{\lambda^*-1} = \\
&= (\lambda^* + \varepsilon) \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\varepsilon \sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} \tilde{\varphi}(k) (\tau^*(k))^{-\varepsilon} k^{\lambda^*-1+\varepsilon} \left(\frac{\tau^*(k)}{k}\right)^\varepsilon \geq \\
&\geq (\lambda^* + \varepsilon) \left(\frac{4}{3}\right)^\varepsilon \tilde{\varphi}(k_i) (\tau^*(k_i))^{-\varepsilon} \sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} k^{\lambda^*-1+\varepsilon} \quad i \geq 2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

რადგან $\lambda \geq 0$ და $l, n \in \mathbb{N}$ ($l \leq n$)

$$\sum_{k=1}^n k^\lambda \geq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^\lambda dx = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{k=1}^n (k^{\lambda+1} - (k-1)^{\lambda+1}) = \frac{n^{\lambda+1} - (l-1)^{\lambda+1}}{1+\lambda},$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\sum_{k=k_1}^{\tau^*(k_i)-1} k^{\lambda^*-1+\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon + \lambda^*} ((\tau^*(k_i))^{\varepsilon+\lambda^*} - k_1^{\varepsilon+\lambda^*}).$$

ამიტომ, (3.11)-დან (3.9) პირობის და $\tilde{\varphi}$ -ის განსაზღვრების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|u(\tau^*(k_i))| \geq u(\tau^*(k_i)) \left(\frac{4}{3}\right)^\varepsilon \left(\frac{\tau^*(k_i) - 1}{\tau^*(k_i)}\right)^{\varepsilon+\lambda^*} (1 - (\tau^*(k_i) - 1)^{-\lambda-\varepsilon} k_1^{\varepsilon+\lambda^*}) \quad i \geq 2.$$

რადგან $\left(\frac{4}{3}\right)^\varepsilon > 1$ და $\tau^*(k_i) \rightarrow +\infty$ როცა $i \rightarrow \infty$ უკანასკნელი უტოლობა ვერ შესრულდება. მიღებულიწინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3.2. ვთქვათ პირობები (3.1) და (1.4₁) სრულდება და არსებობს $\theta > 1$ ისეთი, რომ

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} k \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) \left(\frac{\tau_j(i)}{i} \right)^\lambda \right) > \theta \lambda (1 - \lambda) \tag{3.12}$$

ყოველი $\lambda \in [0; 1)$ -თვის, მაშინ (1.1) განტოლების ყველა წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (3.2) პირობა სრულდება ყოველი $\lambda \in [0; 1)$ -თვის. თუ (3.2) პირობაში მარცხენა ნაწილში არსებული ჯამი არის განშლადი მაშინ ცხადია სრულდება (3.2) პირობა. ამიტომ

ჩვენ ვიგულისხმობთ, რომ ჯამი კრებადია. ამ უკანასკნელის კრებადობიდან გამომდინარეობს (3.12) პირობაში არსებული ჯამის კრებადობა და

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^\lambda \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) \left(\frac{\tau_j(i)}{i} \right)^\lambda \right) = 0.$$

ლემა 2.2-ის გამოყენებით (3.12)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} k^{1-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) \left(\tau_j(i) \right)^\lambda \right) &= k^{1-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} i^\lambda \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) \left(\frac{\tau_j(i)}{i} \right)^\lambda \right) = \\ &= k^{1-\lambda} k^\lambda \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) \left(\frac{\tau_j(i)}{i} \right)^\lambda \right) + \\ &+ k^{1-\lambda} \sum_{i=k+1}^{\infty} (i^\lambda - (i-1)^\lambda) \sum_{s=i}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(s) \left(\frac{\tau_j(s)}{s} \right)^\lambda \right) > \\ &> \theta \lambda (1 - \lambda) + \theta \lambda (1 - \lambda) k^{1-\lambda} \sum_{i=k+1}^{\infty} (i^\lambda - (i-1)^\lambda) i^{-1} = \\ &= \theta \lambda (1 - \lambda) \left(1 + k^{1-\lambda} \sum_{i=k+1}^{\infty} (i^\lambda - (i-1)^\lambda) i^{-1} \right) \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}_{k_0}$ -თვის, $\lambda \in [0; 1)$, სადაც $k_0 \in \mathbb{N}$ საკმარისად დიდი რიცხვია.

რადგან $i^{-1}(i^\lambda - (i-1)^\lambda) = \lambda i^{-1} \int_{i-1}^i x^{\lambda-1} dx \geq \lambda i^{\lambda-2} \quad i \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in [0; 1)$,

ამიტომ

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^{1-\lambda} \sum_{i=k+1}^{\infty} i^{\lambda-2} \geq \frac{1}{1-\lambda}. \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} i^{\lambda-2} \geq \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_i^{i+1} x^{\lambda-2} dx = \int_{k+1}^{\infty} x^{\lambda-2} dx = \frac{(k+1)^{\lambda-1}}{1-\lambda}.$$

უკანასკნელი უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ (3.13) ჭეშმარიტია. უფრო მეტიც არსებობს $\theta_1 \in (0; \theta)$ ისეთი, რომ

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^{1-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m p_j(i) (\tau_j(i))^\lambda \right) > \theta_1 \lambda (1-\lambda) \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) = \theta_1 \lambda$$

ე.ი. (3.2) პირობა სრულდება. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2-დან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები

შედეგი 3.1. ვთქვათ სრულდება (3.1) და

$$p_j(k) \geq c_j p(k) \quad k \in \mathbb{N} \quad (j = 1, \dots, m),$$

სადაც $p: \mathbb{N} \rightarrow [0; +\infty)$ და $c_j \in (0; +\infty)$ ($j = 1, \dots, m$). უფრო მეტიც თუ სრულდება

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p(i) > \max \left\{ \left(\sum_{j=1}^m c_j \alpha_j^\lambda \right)^{-1} \lambda (1-\lambda) : \lambda \in [0; 1] \right\}.$$

მაშინ (1.1) განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

განვიხილოთ განტოლება

$$\Delta^2 u(k) + p(k) u(\tau(k)) = 0. \quad (3.14)$$

(3.14) განტოლებისთვის შედეგი ჩამოყალიბება შემდეგნაირად

შედეგი 3.2. ვთქვათ $p: \mathbb{N} \rightarrow [0; +\infty)$, $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tau(k)}{k} = \alpha \in (0; +\infty),$$

და

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p(i) > \max \{ \alpha^{-\lambda} \lambda (1-\lambda) : \lambda \in [0; 1] \}. \quad (3.15)$$

მაშინ (3.14) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

როცა $\alpha = 1$ მივიღებთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ჰილის რხევადობის თეორემის სხვაობიან ანალოგს. [6].

შედეგი 3.3. ვთქვათ k_0 მთელი რიცხვია, $p: \mathbb{N} \rightarrow [0; +\infty)$. იმისათვის, რომ განტოლების

$$\Delta^2 u(k) + p(k) u(k - k_0) = 0, \quad k > k_0,$$

ყოველი წესიერი ამონახსნი იყოს რხევადი საკმარისია შესრულდეს პირობა

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p(i) > \frac{1}{4}. \quad (3.16)$$

ანალოგიური თეორემა როცა $k_0 = -1$ დამტკიცებულია [1]-ში. (თეორემა 3.4)

შენიშვნა 3.1. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში მუდმივი $\frac{1}{4}$ (3.16)-ში არის ოპტიმალური და მკაცრი უტოლობას ვერ შევცვლით არამკაცრი უტოლობით. ანალოგიურად (3.15) პირობაშიც. ამის დასადაგენად (3.15)-ის მარჯვენა მხარე აღვნიშნოთ c -ით, ხოლო λ_0 წერტილია, რომელშიც აღწევს მაქსიმუმს. ცხადია, რომ $u(k) = k^{\lambda_0}$ არარხევადი წესიერი ამონახსნია განტოლებისა

$$\Delta^2 u(k) + p(k)u([ak]) = 0,$$

სადაც $p(k) = -\frac{\Delta^2(k^{\lambda_0})}{[ak]^{\lambda_0}}$ და $[a]$ აღნიშნავს მთელ ნაწილს a რიცხვისას. მარტივად მიიღება, რომ

$$p(k) = \frac{c}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{როცა} \quad k \rightarrow \infty.$$

აქედან გამომდინარე $p(k) \geq \frac{c-\varepsilon}{k^2}$ $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}_{k_0}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ საკმარისად დიდი რიცხვია.

გავითვალისწინოთ უტოლობა

$$\sum_{i=k}^{\infty} i^{-2} \geq k^{-1},$$

მაშინ მივიღებთ

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p(i) \geq c.$$

შედეგი 3.2-ის გათვალისწინებით უკანასკნელი ზღვარი არ შეიძლება გახდეს მეტი c -ზე. ამიტომ ეს უკანასკნელი უდრის c -ს. ე.ი. არ სრულდება (3.15) პირობა.

ლიტერატურა

- [1] Cheng, S.S.; Yan, T.Ch.; Li, H.J. (1991): oscillation criteria for second order difference equation. *Funkcialaj Ekvacioj*, 34, 223-239.
- [2] Edwards, R.E. (1965): *Functional Analysis. Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston, Chicago-San Fransisco-Toronto.
- [3] Grace, A.R., Lalli, B.S. (1994): Oscillations theorems for second order delay and neutral difference equations. *Utilitas Mathematica* 45, 197-211.
- [4] Gyori, I., Ladas, G. (1991): *Oscillation theory of delay Differential equations with Applications*. Oxford University Press, Oxford
- [5] Hankerson, D., Harris, G.A. (1995): Oscillation of first and second order delay difference equations. *Dynamic Systems and Applications* 4, 251-262.
- [6] Hille, E. (1948): Nonoscillation theorems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 64, 234-252
- [7] Hinton, D.B.; Lewis, R.T. (1978): spectral analysis of second order difference equations. *J. Math. Anal. Appl.* 63, 421-438
- [8] Hooker, J.W.; Patula, W.T. (1981): Riccati type transformations for second order linear difference equations. *J. Math. Anal. Appl.* 82, 451-462
- [9] Koplatadze R. (1994): on oscillation properties of solutions of functional differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 3, 1-177
- [10] Kordonis, I.-G.E.; Philos, Ch. G. (1998): Oscillation and nonoscillation in linear delay or advanced difference equations. *Math Comput. Modelling.* 27, No 7, 11-21
- [11] Kwong, M. K.; Hooker, J.W.; Patula, W.T. (1985): riccati type transformations for second order linear difference equations, II. *J. Math. Anal. Appl.* 107, 182-196
- [12] Zhang, B.G.; Tain, Ch.J. (1998): oscillation criteria for difference equations with unbounded delay. *Computers Math. Applic.* 35, No 4, 19-26.