

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი

კობა ივანაძე

განზოგადოებული სასრული ვარიაციის  
ფუნქციათა კლასების შესახებ

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი  
მათემატიკის დეპარტამენტი

სამეცნიერო-კვლევითი პროექტი 1

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი, მათემატიკის  
დოქტორი თეიმურაზ ახობაძე

თბილისი 2020

## CONTENTS

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| ანოტაცია                                                                  | 2  |
| Summary                                                                   | 3  |
| 1. შესავალი                                                               | 4  |
| 2. განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციების ზოგიერთი თვისება            | 4  |
| 3. განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციის "ანომალიური" თვისების შესახებ | 7  |
| 4. აბსოლუტურად უწყვეტობის განზოგადება                                     | 10 |
| 5. აპროქსიმაცია სტეკლოვის ფუნქციებით                                      | 17 |
| 6. აპროქსიმაცია სინგულარული ინტეგრალებით                                  | 20 |
| References                                                                | 22 |

## ანოტაცია

ნაშრომში შესწავლილია განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასის თვისებები. დადგენილია ამ კლასის "ანომალიური" თვისება. შემოღებულია აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნება  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ და შესწავლილია მისი კავშირი ჩვეულებრივ აბსოლუტურად უწყვეტობასთან. გამოკვლეულია სტეკლოვის ფუნქციებითა და სინგულარული ინტეგრალებით აპროქსიმაციის საკითხები.

## SUMMARY

The properties of the class of functions of generalized bounded variation are studied. The "anomaly" feature of this class is revealed. There is the notation of absolute continuity with respect to  $((p_n), \phi)$  and its connection with the ordinary absolute continuity is investigated. The problems of approximation by Steklov's functions and singular integrals are studied.

## 1. შესავალი

შემოსაზღვრული ვარიაციის ცნება შემოღებულია ჟორდანის[1] მიერ. ვინერმა[2] განიხილა ფუნქციათა  $BV_p$  კლასი. ლავმა[3] შეისწავლა ამ კლასის ფუნქციონალური თვისებები. იუნგმა[4] შემოიღო  $\Phi$ -ვარიაციის ცნება. მუსელაკმა და ორლიჩმა[5] შეისწავლეს ამ კლასის თვისებები. უოტერმანმა[6] შეისწავლა შემოსაზღვრული  $\Lambda$ -ვარიაციის ფუნქციათა კლასი. ჭანტურიამ[7] განსაზღვრა ფუნქციის ვარიაციის მოდულის ცნება. კიტამ და იონედამ[8] შემოიღეს სასრული ვარიაციის ახალი განსაზღვრება. ახოპაძემ[9, 10] განაზოგადა აღნიშნული კლასი და შეისწავლა ამ კლასის თვისებები. ეს ჩამონათვალი კიდევ შეგვიძლია გავაგრძელოთ.(იხ. [11]).

**განსაზღვრება 1.1.** ვთქვათ,  $f(t)$  არის სასრულ, ჩაკეტილ  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქცია. დავუშვათ,  $p_n$  და  $\phi(n)$  ისეთი მიმდევრობებია, რომ  $p_1 \geq 1$ ,  $p_n \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  და  $\phi(1) \geq 1$ ,  $\phi(n) \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . ვიტყვი, რომ  $f \in BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  თუ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) = \sup_n \sup_{\Delta} \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} : \rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(n)} \right)^{1/p_n} < +\infty,$$

სადაც  $\Delta$  არის  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  დანაწილება  $[a, b]$  ინტერვალის და  $\rho(\Delta) = \min_i (t_i - t_{i-1})$ .

როცა  $\phi(n) = 2^n$ ,  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასი განხილულია კიტასა და იონედას[8] მიერ. თუ არ არის არევის საშიშროება  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ -ის ნაცვლად გამოვიყენებთ აღნიშვნას:  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

## 2. განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

ადვილი შესამოწმებელია, რომ  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არის ნორმირებული სივრცე, სადაც

$$\|f\| = |f(a)| + V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

**წინადადება 2.1.** ა)  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi)$  არის წრფივი სივრცე და ყოველი  $\alpha$  და  $\beta$ -თვის გვაქვს:

$$V(\alpha f + \beta g, p_n \uparrow \infty, \phi) \leq |\alpha|V(f, p_n \uparrow \infty, \phi) + |\beta|V(g, p_n \uparrow \infty, \phi).$$

ბ)  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არის სრული სივრცე.

გ)  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არ არის სეპარაბელური.

დ) თუ  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველ  $t$  წერტილში  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$ , მაშინ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V(f_k, p_n \uparrow \infty, \phi).$$

*Proof.* ა) ცხადია.

ბ) ვთქვათ,  $(f_s)$  არის ფუნდამენტური მიმდევრობა  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ -ში. მაშინ ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N(\varepsilon)$ , რომ ყოველი ნატურალური  $i, r >$

$N(\varepsilon)$  რიცხვებისთვის გვაქვს:

$$(2.1) \quad \|f_i - f_r\| = |f_i(a) - f_r(a)| + V(f_i - f_r, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon.$$

ვარიაციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველი  $t$  წერტილისთვის

$$|(f_i - f_r)(t)| - |(f_i - f_r)(a)| \leq |(f_i - f_r)(t) - (f_i - f_r)(a)| \leq V(f_i - f_r, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]),$$

აქედან და (2.1)-დან მივიღებთ

$$|(f_i - f_r)(t)| \leq |f_i(a) - f_r(a)| + V(f_i - f_r, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon.$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ  $(f_s)$  მიმდევრობა თანაბრად კრებადია. ვთქვათ,  $f_r \rightarrow f$  თანაბრად და განვიხილოთ  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება, რომლისთვისაც  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(n)}$ . ყოველი  $i, r > N(\varepsilon)$ -თვის გვაქვს:

$$\left( \sum_{k=1}^m |(f_i - f_r)(t_k) - (f_i - f_r)(t_{k-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} < \varepsilon.$$

$r \rightarrow +\infty$  ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\left( \sum_{k=1}^m |(f_i - f)(t_k) - (f_i - f)(t_{k-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq \varepsilon.$$

ამიტომ,

$$V(f_i - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty.$$

ამასთან რაიმე ფიქსირებული  $i$  ( $i > N(\varepsilon)$ )-თვის გვექნება:

$$\|f\| \leq \|f - f_i\| + \|f_i\| \leq \varepsilon + \|f_i\|$$

გ) ვთქვათ,  $a < x_0 < b$  და

$$(2.2) \quad f_{x_0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } a \leq t \leq x_0, \\ 1, & \text{თუ } x_0 < t \leq b. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $f \in BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ . თუ  $f_{x_0}$  და  $f_{x_1}$  არის  $(a, b)$ -ს ორი განსხვავებული  $x_0 < x_1$  წერტილის შესაბამისი ფუნქციები, მაშინ

$$\|f_{x_0} - f_{x_1}\| = V(f_{x_0} - f_{x_1}, p_n \uparrow \infty, \phi) \geq |(f_{x_0} - f_{x_1})(x_1) - (f_{x_0} - f_{x_1})(0)| = 1.$$

$f_{x_0}$  ფუნქციების სიმრავლე არის არათვლადი და მანძილი ყოველ ორ განსხვავებულ ფუნქციას შორის არ არის ნაკლები 1-ზე. ეს ნიშნავს, რომ  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არ არის სეპარაბელური.

დ) ვთქვათ,

$$A := \liminf_{k \rightarrow \infty} V(f_k, p_n \uparrow \infty, \phi),$$

მაშინ არსებობს ისეთი  $f_{k_r}$  ქვემიმდევრობა, რომ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(f_{k_r}, p_n \uparrow \infty, \phi) = A.$$

ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი მუდმივი  $N(\varepsilon)$ , რომ

$$V(f_{k_r}, p_n \uparrow \infty, \phi) < A + \varepsilon, \quad r > N(\varepsilon).$$

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f_{k_r}(t_i) - f_{k_r}(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq V(f_{k_r}, p_n \uparrow \infty, \phi) < A + \varepsilon.$$

აქედან

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq A + \varepsilon.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi) \leq A.$$

□

**განსაზღვრება 2.2.** ვიტყვით, რომ ფუნქციათა  $f_n$  მიმდევრობა ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, თუ  $V(f_n - f, p_n \uparrow \infty, \phi) \rightarrow 0$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ .

საზოგადოდ, ფუნქციათა მიმდევრობის ვარიაციის აზრით კრებადობიდან გამომდინარეობს თანაბრად კრებადობა. თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  შემოსაზღვრულია, მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ ისინი ექვივალენტურებია. თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს თანაბრად კრებადი მიმდევრობა, რომელიც არ არის ვარიაციის აზრით კრებადი. მართლაც, არსებობს  $\phi(n_k)^{\frac{1}{p_{n_k}}} \rightarrow \infty$  ქვემიმდევრობა და ვთქვათ

$$f_k(t) = \frac{1}{\phi(n_k)^{1/p_{n_k}}} \sin(2\pi[\phi(n_k)/4]t), \quad t \in [0, 1].$$

აქ და შემდგომშიც  $[a]$  სიმბოლოთი აღვნიშნავთ  $a$ -ს მთელ ნაწილს. ცხადია,  $f_k \rightarrow 0$  თანაბრად  $[0, 1]$ -ზე. განვიხილოთ წერტილები:  $t_i^k = \frac{i}{4[\phi(n_k)/4]}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4[\phi(n_k)/4]$ .

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $t_i^k - t_{i-1}^k = \frac{1}{4[\phi(n_k)/4]} \geq \frac{1}{\phi(n_k)}$ . აქედან მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^{4[\phi(n_k)/4]} |f_k(t_i^k) - f_k(t_{i-1}^k)|^{p_{n_k}} \right)^{1/p_{n_k}} = (4[\phi(n_k)/4])^{1/p_{n_k}} \cdot \frac{1}{\phi(n_k)^{1/p_{n_k}}} \geq \frac{1}{2},$$

როცა  $\phi(n_k) \geq 8$ . ეს ნიშნავს, რომ  $V(f_k, p_n \uparrow \infty, \phi, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$  საკმარისად დიდი  $k$ -თვის.

**ლემა 2.3.** ვთქვათ,  $f$  არის  $[a, b]$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია და  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  არის წერტილთა ისეთი სიმრავლე  $[a, b]$ -დან, რომ  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq 3V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

*Proof.* ცხადია, რომ

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\
 & \leq \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} + |f(t_1) - f(a)|^{p_n} + |f(b) - f(t_{m-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\
 & \leq \left( \sum_{i=2}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} + |f(t_1) - f(a)|^{p_n} + |f(b) - f(t_{m-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\
 & \quad + |f(t_1) - f(t_0)| + |f(t_m) - f(t_{m-1})| \leq 3V(f, p_n \uparrow \infty, \phi).
 \end{aligned}$$

□

3. განზოგადოებული სასრული ვარიაციის ფუნქციის "ანომალიური" თვისების შესახებ

**წინადადება 3.1.** ვთქვათ,  $p_1 \geq 1$ ,  $p_n \uparrow \infty$  და  $\phi(1) \geq 1$ ,  $\phi(n) \uparrow \infty$ . მაშინ ყოველი  $x \in (a, b)$ -თვის არსებობს  $y \in (x, b)$  და  $[a, b]$ -ზე განსაზღვრული ისეთი  $f$  ფუნქცია, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, y]) < V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

*Proof.* 1) ვთქვათ  $r$  არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც:  $x - a \geq \frac{2}{\phi(r)}$ ;

$$2) c := x - \frac{1}{\phi(r)};$$

3) ავირჩიოთ ისეთი  $y \in (x, b)$  წერტილი, რომ

$$x < y < x + \frac{1}{\phi(r)},$$

და

$$x < y < c + \frac{1}{\phi(r-1)};$$

4) ვთქვათ  $\xi \in (0, 1)$  ისეთი რიცხვია, რომ

$$0 < \xi < (2^{p_{r+1}/p_r} - 2)^{\frac{1}{p_{r+1}}}.$$

საიდანაც,

$$(2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}} < 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

განვსაზღვროთ  $f$  ფუნქცია  $[a, b]$ -ზე შემდეგი ფორმულით:

$$(3.1) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t = c, \\ \xi, & \text{if } t = y, \\ 0, & \text{if } t \in [a, b], t \neq c, t \neq y. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]) = 2^{p_r}.$$

მართლაც, ვთქვათ  $\Delta = \{a, c, x\}$ . 1) და 2)-დან გამომდინარეობს, რომ  $\rho(\Delta) = \frac{1}{\phi(r)}$ . აქედან

$$(3.2) \quad 2^{\frac{1}{p_r}} = (|f(c) - f(a)|^{p_r} + |f(x) - f(c)|^{p_r})^{\frac{1}{p_r}} \leq V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

ვთქვათ,  $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = x\}$  არის  $[a, x]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება, მაშინ გვაქვს ორი შემთხვევა:

ა) თუ  $c$  არ არის  $\Delta$  დანაწილების წერტილი, მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} = 0;$$

ბ) თუ  $c$  არის  $\Delta$  დანაწილების წერტილი, მაშინ  $\rho(\Delta) = \min_i \{t_i - t_{i-1}\} \leq x - c = \frac{1}{\phi(r)}$ . თუ  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$ , ყოველი დანაწილებისთვის, რომელიც შეიცავს  $c$ -ს, გვექნება  $\frac{1}{\phi(r)} \geq \frac{1}{\phi(k)}$ , აქედან  $k \geq r$ . იქედან, რომ  $p_n$  არის მკაცრად ზრდადი მივიღებთ:

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{1/p_k} = 2^{\frac{1}{p_k}} \leq 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

ამ ორი შემთხვევიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = x$  დანაწილებისთვის, რომლისთვისაც  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(n)}$ , გვექნება

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

აქედან და (3.2)-დან მივიღებთ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]) = 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

წინადადების დამტკიცებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, y]) < 2^{\frac{1}{p_r}} = V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = y$  არის  $[a, y]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება. მაშინ გვაქვს სამი შემთხვევა:

შემთხვევა 1.  $c$  არ ეკუთვნის  $\Delta$ -ს. მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} = |f(y) - f(t_{m-1})| = \xi.$$

შემთხვევა 2.  $c$  ეკუთვნის  $\Delta$ -ს, მაგრამ არცერთი წერტილი  $(c, y)$ -დან არ ეკუთვნის  $\Delta$ -ს, ანუ  $t_m = y$  და  $t_{m-1} = c$ . მაშინ 3)-დან გამომდინარეობს

$$\rho(\Delta) \leq y - c < \frac{1}{\phi(r-1)}.$$

ამიტომ, თუ  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$  მაშინ  $k > r - 1$  და  $k \geq r$ .

რადგან ყოველი ფიქსირებული  $a$  ( $0 < a < 1$ )-თვის  $(1 + a^x)^{\frac{1}{x}}$  ფუნქცია არის კლებადი  $x$  ( $x \geq 1$ )-ის მიმართ. (3.1)-დან გვაქვს

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{1/p_k} = (1 + (1 - \xi)^{p_k})^{\frac{1}{p_k}} \leq (1 + (1 - \xi)^{p_r})^{\frac{1}{p_r}} < 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

შემთხვევა 3.  $c$  ეკუთვნის  $\Delta$ -ს და არსებობს წერტილი  $(c, y)$ -დან, რომელიც ეკუთვნის  $\Delta$ -ს.  
2) და 3)-დან მივიღებთ

$$y - c = y - x + x - c < \frac{1}{\phi(r)} + \frac{1}{\phi(r)} = \frac{2}{\phi(r)}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება  $\rho(\Delta) < \frac{1}{\phi(r)}$ . ამასთან, თუ  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$ , მაშინ  $k \geq r + 1$ . აქედან

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{1/p_k} = (2 + \xi^{p_k})^{\frac{1}{p_k}} \leq (2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}}.$$

მაშასადამე, სამივე შემთხვევაში, როცა  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$  გვაქვს

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{1/p_k} \leq \max \left\{ \xi, (1 + (1 - \xi)^{p_r})^{\frac{1}{p_r}}, (2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}} \right\}.$$

განსაზღვრება 1.1 და 4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, y]) \leq \max \left\{ \xi, (1 + (1 - \xi)^{p_r})^{\frac{1}{p_r}}, (2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}} \right\} < 2^{\frac{1}{p_r}} =$$

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

□

შენიშვნა 3.2. ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$ -ზე და  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ . ლემა 2.3-დან გამომდინარეობს, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a_1, b_1]) \leq 3 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

შენიშვნა 3.3. ვთქვათ,  $c \in (a, b)$  და  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება, რომლისთვისაც  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  და  $t_{k-1} < c \leq t_k$ . რადგან  $\frac{1}{p_n} \leq 1$ , გვაქვს

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq \left( \sum_{i=1}^{k-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\ & + |f(c) - f(t_{k-1})| + |f(t_k) - f(c)| + \left( \sum_{i=k+1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n}. \end{aligned}$$

ბოლო უტოლობიდან და ლემა 2.3-დან გამომდინარეობს

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 4 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, c]) + 4 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, b]).$$

4. აბსოლუტურად უწყვეტობის განზოგადოება

**განსაზღვრება 4.1.** ვიტყვი, რომ სასრულო, ჩაკეტილ  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული  $f$  ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, თუ სრულდება შემდეგი პირობა: ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის, არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{1/p_n} < \varepsilon,$$

ყოველი არაგადამფარავი  $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , ინტერვალების სასრული სიმრავლისთვის, რომლისთვისაც  $\beta_i - \alpha_i \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  და

$$\left( \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i)^{p_n} \right)^{1/p_n} < \delta.$$

ამ კლასს ჩვენ აღვნიშნავთ  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ -თი და ზოგჯერ სიმარტივისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნას  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, მაშინ  $f$  არის უწყვეტი.

**ლემა 4.2.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$ -ზე და  $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , არის არაგადამფარავი ინტერვალების ისეთი სასრული სიმრავლე, რომ  $\min_i (\beta_i - \alpha_i) \geq \frac{1}{\phi(n)}$ . მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq 6V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

*Proof.* გამომდინარეობს ლემა 2.3-დან. □

**წინადადება 4.3.**  $f$  ეკუთვნის  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი  $\delta > 0$ , რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \varepsilon,$$

ყოველი  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ -თვის, სადაც  $t_2 - t_1 < \delta$ .

*Proof.* აუცილებლობა ცხადია. ახლა უნდა ვაჩვენოთ საკმარისობა. დავუშვათ  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{16},$$

ყოველი  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ -თვის, როცა  $t_2 - t_1 < \eta$ .

ვთქვათ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი ფიქსირებული დანაწილება, რომლისთვისაც  $x_i - x_{i-1} = \eta_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , სადაც  $\eta_1 < \eta$ . მაშინ

$$(4.1) \quad V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{16}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

დავუშვათ,  $r$  არის ისეთი დადებითი მთელის რიცხვი, რომლისთვისაც  $m^{\frac{1}{pr}} < 2$  და  $\delta = \min\{\eta_1, \frac{1}{\phi(r)}\}$ . ვთქვათ,  $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , არის არაგადაშლადი ინტერვალების ისეთი სასრული სიმრავლე, რომლისთვისაც

$$\left( \sum_{i=1}^s (\beta_i - \alpha_i)^{p_n} \right)^{1/p_n} < \delta,$$

და

$$\beta_i - \alpha_i \geq \frac{1}{\phi(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\left( \sum_{i=1}^s |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{1/p_n} < \varepsilon.$$

ვთქვათ,

$$A_k := \{i : (\alpha_i, \beta_i) \subset [x_{k-1}, x_k]\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

(4.1) და ლემა 4.2-დან

$$\sum_{i \in A_k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \leq (6V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{k-1}, x_k]))^{p_n} < \left( \frac{6\varepsilon}{16} \right)^{p_n}.$$

ვთქვათ,

$$B_k := \{i : \alpha_i < x_k < \beta_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

შევნიშნოთ, რომ  $B_k$  არაუმეტეს ერთ ელემენტს და თუ  $i \in B_k$ , მაშინ  $\alpha_i \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $\beta_i \in [x_k, x_{k+1}]$ . აქედან

$$\begin{aligned} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} &\leq (|f(\beta_i) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(\alpha_i)|)^{p_n} \\ &\leq (V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{k-1}, x_k]) + V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_k, x_{k+1}]))^{p_n} < \left( \frac{2\varepsilon}{16} \right)^{p_n}. \end{aligned}$$

რადგან  $\frac{1}{p_n} \leq 1$ , მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{i=1}^s |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\ &= \left( \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i \in A_k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} + \sum_{i \in B_k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right) \right)^{1/p_n} \\ &< \left( \sum_{k=1}^m \left( \frac{6\varepsilon}{16} \right)^{p_n} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{2\varepsilon}{16} \right)^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq \left( \sum_{k=1}^m \left( \frac{6\varepsilon}{16} \right)^{p_n} \right)^{1/p_n} + \left( \sum_{k=1}^m \left( \frac{2\varepsilon}{16} \right)^{p_n} \right)^{1/p_n}. \end{aligned}$$

ამასთან,  $\frac{1}{\phi(n)} \leq \beta_i - \alpha_i < \delta \leq \frac{1}{\phi(r)}$ , აქედან  $n > r$ . რადგან  $m^{\frac{1}{pr}} < 2$ , უკანასკნელი წევრი არ გადაჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$m^{\frac{1}{p_n}} \cdot \frac{8\varepsilon}{16} < m^{\frac{1}{pr}} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

შენიშვნა 3.3 და წინადადება 4.3-დან გამომდინარეობს, რომ  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi) \subset BV(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

**წინადადება 4.4.** თუ  $f$  აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

*Proof.* ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია. მაშინ არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ ყოველი არაგადამფარავი  $(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \dots, m$  ინტერვალებისთვის სრულდება უტოლობა

$$\sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

როდესაც  $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ .

თუ  $x_2 - x_1 < \delta$ , მაშინ ყოველი  $x_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = x_2$  დანაწილებისთვის გვაქვს  $\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) = x_2 - x_1 < \delta$ , აქედან

$$\left( \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \varepsilon.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_1, x_2]) \leq \varepsilon$ . წინადადება 4.3-დან მივიღებთ, რომ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .  $\square$

**წინადადება 4.5.** თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  შემოსაზღვრულია, მაშინ  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

*Proof.* ვთქვათ, რაიმე დადებით  $C$  მუდმივისთვის  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}} \leq C$  და  $f$  უწყვეტია  $[a, b]$ -ზე. ცხადია,  $f$  არის თანაბრად უწყვეტი. თუ  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ), რომ

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad \text{როცა } t_1 - t_2 < \delta.$$

ვთქვათ,  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  და  $x_2 - x_1 < \delta$ . თუ  $x_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = x_2$  არის რაიმე დანაწილება, სადაც  $t_i - t_{i-1} \geq \frac{1}{\phi(n)}$ . ცხადია,  $m \leq \delta \phi(n) < \phi(n)$  და

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} < \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\varepsilon}{2C} \right)^{p_n} \right)^{1/p_n} = m^{\frac{1}{p_n}} \frac{\varepsilon}{2C} \leq \phi(n)^{\frac{1}{p_n}} \frac{\varepsilon}{2C} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

ეს ნიშნავს, რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_1, x_2]) < \varepsilon$  და წინადადება 4.3-ის ძალით  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.  $\square$

**წინადადება 4.6.** თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც არ არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

*Proof.* რადგან  $\phi(n)^{1/p_n}$  არ არის შემოსაზღვრული, ამიტომ ყოველი დადებითი მთელი  $k$  რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი მთელი  $n_k$  რიცხვი, რომ

$$(4.2) \quad \left[ \frac{\phi(n_k)}{4k(k+1)} \right]^{1/p_{n_k}} > k.$$

ვთქვათ,  $c_k = \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , და  $\lambda_k = \left\lceil \frac{\phi(n_k)}{4k(4+1)} \right\rceil$ . განვიხილოთ  $[0, 1]$ -ზე უწყვეტი შემდეგი ფუნქცია:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_k^{-1/p_{n_k}} \sin(2\lambda_k \pi \frac{t-c_{k+1}}{c_k-c_{k+1}}), & \text{როცა } t \in [c_{k+1}, c_k], \\ 0, & \text{როცა } t = 0. \end{cases}$$

ვთქვათ,  $x_i^k = c_{k+1} + i \frac{c_k - c_{k+1}}{4\lambda_k}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4\lambda_k$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $x_0^k = c_{k+1}$ ,  $x_{4\lambda_k}^k = c_k$  და

$$(4.3) \quad f(x_i^k) = \lambda_k^{-1/p_{n_k}} \sin\left(i \frac{\pi}{2}\right).$$

(4.2)-დან

$$(4.4) \quad x_i^k - x_{i-1}^k = \frac{c_k - c_{k+1}}{4\lambda_k} \geq \frac{1}{k(k+1)} : \frac{4\phi(n_k)}{4k(k+1)} = \frac{1}{\phi(n_k)}.$$

(4.3) და (4.4) უტოლობებიდან კი მივიღებთ:

$$\begin{aligned} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_k]) &\geq \left( \sum_{i=1}^{4\lambda_k} |f(x_i^k) - f(x_{i-1}^k)|^{p_{n_k}} \right)^{1/p_{n_k}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{4\lambda_k} \left( \lambda_k^{-1/p_{n_k}} \right)^{p_{n_k}} \right)^{1/p_{n_k}} = \lambda_k^{-1/p_{n_k}} \cdot (4\lambda_k)^{1/p_{n_k}} > 1. \end{aligned}$$

ლემა 4.3-დან გამომდინარეობს, რომ  $f$  არ არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ. □

**ლემა 4.7.** თუ  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასის  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  ფუნქციათა მიმდევრობა ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, მაშინ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ .

*Proof.* ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $N$  ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი  $k > N$ -თვის

$$V(f_k - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ვთქვათ,  $k_0 > N$ . რადგან  $f_{k_0}$  is აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ არსებობს ისეთი  $\delta > 0$ , რომ

$$V(f_{k_0}, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{4},$$

როდესაც  $t_2 - t_1 < \delta$ . აქედან, წინადადება 2.1 და შენიშვნა 3.2-დან გვაქვს

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) \leq V(f - f_{k_0}, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) + V(f_{k_0}, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) \leq \varepsilon.$$

მაშასადამე, წინადადება 4.3-დან  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ . □

ლემა 4.7-ში ვარიაციის აზრით კრებადობა არ შეიძლება შეცვალოთ თანაბარი კრებადობით. მართლაც, ლემა 4.6-ში აგებული უწყვეტი ფუნქციის ფეიერის  $(C, 1)$  საშუალოები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ თანაბრად კრებადია  $f$  ფუნქციისკენ, მაგრამ  $f \notin AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

**ლემა 4.8.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$ -ზე,  $[c, d] \subset [a, b]$  და  $f(c) = f(d) = 0$ . თუ

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [c, d], \\ 0, & t \in [a, b] \setminus [c, d], \end{cases}$$

მაშინ

$$V(g, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).$$

*Proof.* ლემა 2.3-დან,  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველი დანაწილებისთვის, რომლისთვისაც  $t_{k-1} < c \leq t_k$  და  $t_{r-1} \leq d < t_r$ , მივიღებთ

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} &\leq \left( \sum_{i=k+1}^{r-1} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} + |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &+ |g(t_r) - f(t_{r-1})| = \left( \sum_{i=k+1}^{r-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} + |f(t_k) - f(c)| + |f(d) - f(t_{r-1})| \\ &\leq 5 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]). \end{aligned}$$

□

**ლემა 4.9.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$ -ზე, ხოლო  $\{c_i\}_1^\infty$  ისეთი რიცხვითი მიმდევრობაა, რომ  $c_i \downarrow a$ ,  $c_1 = b$  და  $f(c_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , მაშინ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{i+1}, c_i]).$$

*Proof.* ვთქვათ,

$$f_i(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [c_{i-1}, c_i], \\ 0, & t \notin [c_{i-1}, c_i]. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$   $[a, b]$  ინტერვალზე და წინადადება 2.1(დ)-დან

$$\begin{aligned} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V \left( \sum_{i=1}^k f_i, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b] \right) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k V(f_i, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} V(f_i, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]). \end{aligned}$$

ლემა 4.8-დან მივიღებთ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{i+1}, c_i]).$$

□

**ლემა 4.10.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $h$ . მაშინ ყოველი  $a$ -თვის

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + mh]) \leq 4m^{\frac{1}{p_r}} \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]),$$

სადაც  $mh < \frac{1}{\phi(r-1)}$ .

*Proof.* ცხადია, რომ ყოველი  $t_1$ -სა და  $t_2$ -თვის, რომლებიც ეკუთვნის  $[a, a + mh]$ -ს, გვაქვს

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]).$$

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = a + mh$  არის რაიმე დანაწილება, რომლისთვისაც  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $n \geq r$ . დავუშვათ, რომ

$$A_k := \{i : [t_{i-1}, t_i] \subset [a + (k-1)h, a + kh]\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$f$ -ის პერიოდულობისა და ლემა 2.3-ის ძალით გვაქვს

$$\sum_{i \in A_k} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|^{p_n} \leq (3V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]))^{p_n}.$$

ვთქვათ,

$$B_k := \{i : t_{i-1} < x_k < t_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$B_k$  შეიცავს არაუმეტეს ერთ წერტილს. თუ  $i \in B_k$ , მაშინ

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]).$$

მაშასადამე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^s |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\ & \leq \left( \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i \in A_k} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|^{p_n} + \sum_{i \in B_k} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|^{p_n} \right) \right)^{1/p_n} \\ & \leq \left( \sum_{k=1}^m (3 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]))^{p_n} + (V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]))^{p_n} \right)^{1/p_n} \\ & \leq 4 \cdot m^{\frac{1}{p_n}} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]) \leq 4 \cdot m^{\frac{1}{pr}} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]). \end{aligned}$$

□

**წინადადება 4.11.** ყოველი  $q \geq 1$ -თვის არსებობს ფუნქცია, რომელიც არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, მაგრამ არ ეკუთვნის  $V_q$  კლასს, სადაც  $V_q$  არის ვინერ-იუნგის  $q$ -განზოგადოებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასი.

*Proof.* ვთქვათ,  $c_k = \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . განვიხილოთ  $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქცია:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} \sin(2k^{[3q]} \pi \frac{t - c_{k+1}}{c_k - c_{k+1}}), & \text{როცა } t \in [c_{k+1}, c_k], \\ 0, & \text{როცა } t = 0, \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ყოველ  $[c_{k+1}, c_k]$  ინტერვალზე პერიოდულია, პერიოდით  $h := \frac{c_k - c_{k+1}}{k^{[3q]}}$ ,  $f(c_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , და

$$(4.5) \quad V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_{k+1} + h]) \leq \frac{4}{k^2}.$$

ვთქვათ,  $r$  უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც  $p_r > 3q$ , მაშინ  $2 - \frac{[3q]}{p_r} > 1$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $c_{k+1} + k^{[3q]}h = c_k$ . თუ  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{\phi(r-1)}$ , მაშინ (4.5) უტოლობიდან და ლემა 4.10-დან გამომდინარეობს, რომ

$$(4.6) \quad \begin{aligned} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_k]) &\leq 4k^{\frac{[3q]}{p_r}} \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_{k+1} + h]) \\ &\leq 4k^{\frac{[3q]}{p_r}} \cdot \frac{4}{k^2} \leq \frac{16}{k^{2-[3q]/p_r}}. \end{aligned}$$

ვთქვათ,

$$s_k(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [c_{k+1}, 1], \\ 0, & t \notin [c_{k+1}, 1], \end{cases}$$

ლემა 4.8-დან გამომდინარეობს, რომ

$$V(f - s_k, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [0, c_{k+1}]).$$

(4.6) და ლემა 4.9-დან გამომდინარეობს, რომ უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარე არ გადააჭარბებს შემდეგ სიდიდეს:

$$25 \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{j+1}, c_j]) \leq 25 \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{16}{k^{2-[3q]/p_r}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

ეს ნიშნავს, რომ  $s_k$  ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, ამასთან ყოველი  $s_k$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ამიტომ წინადადება 4.4-დან მივიღებთ, რომ  $s_k$  ეკუთვნის  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [0, 1])$  კლასს. ამ მსჯელობიდან და ლემა 4.7-დან გამომდინარეობს, რომ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

ვთქვათ,  $x_i^k = c_{k+1} + i\frac{h}{4}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4k^{[3q]}$ . მაშინ  $f(x_i^k) = \frac{1}{k^2} \sin(i\frac{\pi}{2})$  და

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^{4k^{[3q]}} |f(x_i^k) - f(x_{i-1}^k)|^q = \sum_{i=1}^{4k^{[3q]}} \left(\frac{1}{k^2}\right)^q = 4k^{[3q]} \cdot \frac{1}{k^{2q}} > 1.$$

ყოველი ნატურალური  $M$ -თვის არსებობს ისეთი ნატურალური  $N$  რიცხვი, რომ  $N^{\frac{1}{q}} \geq M$ . თუ დანაწილების ელემენტებად განვიხილავთ წერტილებს  $x_i^k$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4k^{[3q]}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , (4.7) შეფასებიდან მივიღებთ

$$V_q(f, [0, 1]) \geq \left( \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{4k^{[3q]}} |f(x_i^k) - f(x_{i-1}^k)|^q \right)^{1/q} > \left( \sum_{k=1}^N 1 \right)^{1/q} = N^{1/q} \geq M.$$

ეს ნიშნავს, რომ  $f$  არ ეკუთვნის  $V_q([0, 1])$  კლასს. □

5. აპროქსიმაცია სტოქასტიკური ფუნქციებით

**ლემა 5.1.** ვთქვათ  $\{g_h : h \geq 0\}$  არის  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქციათა სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:

i) ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის, არსებობს ისეთი ნატურალური  $N$ , რომ ყოველი  $h > N$ -სა და ყოველი  $t \in [a, b]$ -თვის, გვაქვს  $g_h(t) < \varepsilon$ ;

ii) ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს  $[a, b]$  ინტერვალის ფიქსირებული დანაწილება  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$  და ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ ყოველი  $h > N$ -თვის

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

მაშინ

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty.$$

*Proof.* ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია. (ii) პირობიდან არსებობს ფიქსირებული დანაწილება  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$  და ნატურალური  $N_1$ , რომ ყოველი  $h > N_1$ -თვის სამართლიანია შეფასება:

$$(5.1) \quad V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{10}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

ვთქვათ,  $l$  არის ისეთი უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომ  $r^{\frac{1}{p_l}} \leq 2$  და  $\phi(l) \geq \frac{5}{b-a}$ .

(i) პირობიდან არსებობს ისეთი  $N_2$ , რომ ყოველი  $h > N_2$ -თვის

$$(5.2) \quad g_h(t) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\phi(l)}, \quad t \in [a, b].$$

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon,$$

როცა  $h > N = \max\{N_1, N_2\}$ .

ვთქვათ  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

შემთხვევა 1:  $n \leq l$ , მაშინ  $b - a = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\phi(n)} = \frac{m}{\phi(n)}$ , აქედან

$$(5.3) \quad m \leq (b-a)\phi(n) \leq (b-a)\phi(l).$$

(5.2)-დან

$$|g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})| \leq |g_h(t_i)| + |g_h(t_{i-1})| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)\phi(l)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)\phi(l)} = \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)}.$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან და (5.3)-დან მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^m |g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq m^{\frac{1}{p_n}} \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} < m \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} \leq \varepsilon.$$

შემთხვევა 2 :  $n > l$ . ვთქვათ

$$A_k := \{i : [t_{i-1}, t_i] \subset [x_{k-1}, x_k]\}, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

(5.1) და ლემა 2.3-დან მივიღებთ

$$(5.4) \quad \sum_{i \in A_k} |g_h(t_{i-1}) - g_h(t_i)|^{p_n} \leq (3V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{k-1}, x_k]))^{p_n} < \left(\frac{3\varepsilon}{10}\right)^{p_n}.$$

ვთქვათ,

$$B_k := \{i : t_{i-1} < x_k < t_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

შევნიშნოთ, რომ  $B_k$  შეიცავს არაუმეტეს ერთ წერტილს. თუ  $i \in B_k$ , მაშინ

$$|g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)}.$$

აქედან და (5.4)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^m |g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i \in A_k} |g_h(t_{i-1}) - g_h(t_i)|^{p_n} + \sum_{i \in B_k} |g_h(t_{i-1}) - g_h(t_i)|^{p_n} \right) \right)^{\frac{1}{p_n}} \\ &< \left\{ \sum_{k=1}^r \left( \left( \frac{3\varepsilon}{10} \right)^{p_n} + \left( \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} \right)^{p_n} \right) \right\}^{\frac{1}{p_n}} \leq r^{\frac{1}{p_l}} \left( \frac{3\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} \right) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty.$$

□

**ლემა 5.2.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $b-a$  და არსებობს ისეთი  $\varepsilon > 0$  და  $\delta > 0$  რიცხვები, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \varepsilon,$$

ყოველი  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ -თვის, სადაც  $t_2 - t_1 < \delta$ . მაშინ ყოველი ნამდვილი  $h$ -თვის

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < 8\varepsilon,$$

სადაც  $f^h(t) = f(h+t)$  და  $t_2 - t_1 < \delta$ ,  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ .

*Proof.* რადგან  $f$  პერიოდული, საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა  $0 < h < b-a$ . გვაქვს ორი შემთხვევა:

თუ  $b \notin [t_1 + h, t_2 + h]$ ,  $f$ -ის პერიოდულობიდან მივიღებთ, რომ

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) = V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1 + h, t_2 + h]) < \varepsilon.$$

თუ  $b \in [t_1 + h, t_2 + h]$ , შენიშვნა 3.3-დან

$$\begin{aligned} & V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) = V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1 + h, t_2 + h]) \\ & \leq 4V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1 + h, b]) + 4V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [b, t_2 + h]) < 8\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**ლემა 5.3.** თუ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ ;  $[a, b]$ -ზე, პერიოდულია პერიოდით  $b - a$ , მაშინ  $V(f^h - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0$ , როცა  $h \rightarrow 0+$ , სადაც  $f^h(t) = f(h + t)$ .

*Proof.* ვთქვათ  $g_{1/h} := f^h - f$ . საკმარისია ვახვეთ, რომ  $g_{1/h}$  ფუნქციები აკმაყოფილებს ლემა 5.1-ის პირობებს.

1) რადგან  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, ის არის თანაბრად უწყვეტი  $[a, b]$ -ზე. მაშინ ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ  $|f(t + h) - f(t)| < \varepsilon$ , როდესაც  $h < \delta$ .

2) ვთქვათ  $\varepsilon > 0$  მოცემულია. რადგან  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{9}$  როცა  $t_2 - t_1 < \eta$ .

ვთქვათ,  $a = x_0 < \dots < x_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი დანაწილება, რომ  $x_i - x_{i-1} < \eta$ , მაშინ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{9}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , და ლემა 5.3-დან

$$V(g_{\frac{1}{h}}, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq$$

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) + V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon.$$

მივიღეთ, რომ  $g_{\frac{1}{h}}$  აკმაყოფილებს ლემა 5.1-ის პირობებს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $V(f^h - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0$ , როცა  $h \rightarrow 0+$ .  $\square$

**წინადადება 5.4.** ვთქვათ,  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით  $b - a$ . მაშინ  $f$  ფუნქციის  $f_k$  სტეკლოვის ფუნქციების მიმდევრობა, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით

$$f_k(t) = k \int_t^{t+\frac{1}{k}} f(\tau) d\tau,$$

ვარიაციის აზრით კრებადია  $f(t)$  ფუნქციისკენ.

*Proof.*

$$f_k(t) - f(t) = k \int_0^{\frac{1}{k}} (f(t + \tau) - f(t)) d\tau.$$

ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ ლემა 5.3-დან არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ

$$(5.5) \quad V(f^h - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon, \quad h < \delta,$$

სადაც  $f^h(t) = f(h + t)$ . რადგან  $|x|^p$ ,  $p \geq 1$ , არის ამოზნექილი ფუნქცია, იენსენის უტოლობის ძალით გვექნება

$$(5.6) \quad \left| k \int_0^{\frac{1}{k}} g(t) dt \right|^{p_n} \leq k \int_0^{\frac{1}{k}} |g(t)|^{p_n} dt.$$

ვთქვათ,  $\frac{1}{k} < \delta$  და  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . (5.5) და (5.6)-დან მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^m |(f_k - f)(t_i) - (f_k - f)(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_1^m \left| k \int_0^{\frac{1}{k}} (f(t_i + \tau) - f(t_i) - f(t_{i-1} + \tau) + f(t_{i-1})) d\tau \right|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\
&\leq \left( k \int_0^{\frac{1}{k}} \sum_1^m |f(t_i + \tau) - f(t_i) - f(t_{i-1} + \tau) + f(t_{i-1})|^{p_n} d\tau \right)^{1/p_n} \\
&\leq \left( k \int_0^{\frac{1}{k}} V(f^\tau - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])^{p_n} d\tau \right)^{1/p_n} < \left( k \int_0^{\frac{1}{k}} \varepsilon^{p_n} d\tau \right)^{1/p_n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $V(f_k - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon$ , როცა  $\frac{1}{k} < \delta$ .  $\square$

თუ  $f$  არის ინტეგრებადი ფუნქცია  $[a, b]$ -ზე, მაშინ მისი სტეკლოვის  $f_k$  ფუნქციები აბსოლუტურად უწყვეტია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $f_k \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ . მაშასადამე, ლემა 4.7-დან, თუ  $V(f_k - f, p_n \uparrow \infty, \phi) \rightarrow 0$ , მაშინ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ .

## 6. აპროქსიმაცია სინგულარული ინტეგრალებით

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ პერიოდული და  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი  $f$  ფუნქციის ვარიაციის აზრით აპროქსიმაციის ამოცანას შემდეგი სახის ინტეგრალებით:

$$I_q(t) = \int_a^b K_q(\tau) f(t + \tau) d\tau.$$

**ლემა 6.1.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით  $b - a$ ,  $K_q$  არის ისეთი ფუნქცია, რომ  $\int_a^b |K(t)| dt = \theta$ , და  $I(t) = \int_a^b K(\tau) f(t + \tau) dt$ . მაშინ

$$V(I, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]) \leq \theta \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d])$$

ყოველი  $[c, d]$  ინტერვალისთვის, სადაც  $f^\tau(t) = f(t + \tau)$ .

*Proof.* ვთქვათ,  $c = t_0 < t_1 < \dots < t_m = d$  არის რაიმე და ნაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . მაშინ

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{i=1}^m |I(t_i) - I(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} &= \left( \sum_1^m \left| \int_a^b K(\tau) (f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)) d\tau \right|^{p_n} \right)^{1/p_n} \\
&\leq \left( \sum_1^m \left( \int_a^b |K(\tau)| \cdot |f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)|^{p_n} d\tau \right)^{p_n} \right)^{1/p_n}.
\end{aligned}$$

იენსენის უტოლობით, უკანასკნელი წევრი არ გადააჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას

$$\begin{aligned}
&\left( \sum_{i=1}^m \theta^{p_n} \cdot \frac{\int_a^b |K(\tau)| \cdot |f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)|^{p_n} d\tau}{\theta} \right)^{1/p_n} \\
&= \frac{\theta}{\theta^{1/p_n}} \left( \int_a^b |K(\tau)| \cdot \sum_{i=1}^m |f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)|^{p_n} d\tau \right)^{1/p_n} \\
&\leq \frac{\theta}{\theta^{1/p_n}} \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]) \cdot \left( \int_a^b |K(\tau)| d\tau \right)^{1/p_n} \\
&= \theta \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).
\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$V(I, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]) \leq \theta \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).$$

□

**წინადადება 6.2.** ვთქვათ,  $\int_a^b |k_q(t)| dt = \theta_q$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , და  $(\theta_q)$  შემოსაზღვრულია;  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, პერიოდულია პერიოდით  $b-a$  და  $I_q(t) = \int_a^b K_q(\tau) f(t+\tau) dt$ . თუ რაიმე  $\xi$ -თვის ფუნქციითა  $I_q(t)$  მიმდევრობა თანაბრად კრებადია  $f^\xi(t)$ -კენ, მაშინ

$$V(I_q - f^\xi, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty,$$

სადაც  $f^\xi(t) = f(t + \xi)$ .

*Proof.* საკმარისი ვაჩვენოთ, რომ  $I_q - f^\xi$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , მიმდევრობა აკმაყოფილებს ლემა 5.1-ის ii) პირობა

ვთქვათ,  $\theta_q \leq C$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , და  $\varepsilon > 0$ . რადგან  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{8(C+1)}$  ყოველი  $t_2 - t_1 < \eta$ -თვის.

დავუშვათ, რომ  $a = x_0 < \dots < x_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი დანაწილება, რომ  $x_i - x_{i-1} < \eta$ , მაშინ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{8(C+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , და ლემა 5.2-დან

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{(C+1)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

ყოველი ნამდვილი  $h$ -თვის. ლემა 6.1-დან

$$V(I_q, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq \theta_q \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq \frac{C\varepsilon}{C+1}.$$

უკანასკნელი ორი უტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$V(I_q - f^\xi, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq$$

$$V(I_q, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) + V(f^\xi, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{C\varepsilon}{C+1} + \frac{\varepsilon}{(C+1)} = \varepsilon,$$

ყოველი  $i = 1, 2, \dots, m$ -თვის. □

**Corollary 6.3.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $2\pi$  და  $\sigma_n^\alpha(f)$  არის ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ მისი ფურიეს მწკვრივების  $(C, \alpha)$ ,  $(\alpha > 0)$  საშუალოები.

$\sigma_n^\alpha(f)$  ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

საკმარისობა გამომდინარეობს წინადადება 6.2-დან.

აუცილებლობა. რადგან  $\sigma_n^\alpha(f)$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ამიტომ  $\sigma_n^\alpha(f) \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ . ლემა 4.7-დან, თუ  $\sigma_n^\alpha(f)$  ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, მაშინ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

**Corollary 6.4.** ვთქვათ,  $K_q(t) \geq 0$ ,  $\int_a^b K_q(t)dt \rightarrow 1$  როცა  $q \rightarrow \infty$  და  $\int_{a+\delta}^{b-\delta} K_q(t)dt \rightarrow 0$  როცა  $q \rightarrow \infty$  ყოველი  $0 < \delta < \frac{1}{2}(b-a)$ -თვის და  $f$  ძრის პერიოდული, პერიოდით  $b-a$ .

თუ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  მაშინ  $V(I_q - f^a, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0$ , სადაც  $f^a(t) = f(t+a)$ .

#### REFERENCES

- [1] *Jordan C.*, Sur la séries de Fourier, C .R Acad. Sci. Paris, 92 (1881), 228-230.
- [2] *Wiener N.*, The quadratic variation of function and its Fourier coefficients, Masachusetts J. Math., 3 (1924), 72-94.
- [3] *Love E. R.*, A generalization of absolute continuity, J. Lond. Math. Soc. 26 (1951), 1-13.
- [4] *Young L.*, Sur une généralization de la notion de variation de poissance p-ième bornee au sen de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris, 204 (1937) , 470-472.
- [5] *Musielak J., Orlicz W.*, On generalized variations (I), Studia Mathematica, 18 (1959), 11-41.
- [6] *Waterman D.*, On the summability of Fourier series of Function of  $\lambda$ -bounded variation, Studia Math., 44 (1972), 107-117.
- [7] *Chanturia Z.*, The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 214 (1974), 63-66.
- [8] *Kita H., Yoneda K.*, A generalization of bounded variation, Acta Math. Hungar., 56 (1990), 229-238.
- [9] *Akhobadze T.*, Function of generalized Wiener classes  $BV(p(n) \rightarrow \infty, \phi)$  and their Fourier coefficients, Georgian Math. J., 7 (2000), 401-416.
- [10] *Akhobadze T.*, A generalization of bounded variation, Acta math. Hungar., 97 (3), (2002) 223-256.
- [11] *Ziemer W.P.* Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation, Springer-Verlag (2012);