

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი გოგნაძე

ჰილბერტის გარდაქმნა

(დოქტორანტის სემინარი)

ხელმძღვანელი: თსუ ასოც. პროფ.
ფიზ. მათ. მეცნ. დოქტორი
თეიმურაზ ახოზაძე

2020 წელი

ს ა რ ზ ე ვ ი

შესავალი-----	3
§1 ჰილბერტის გარდაქმნის არსებობა ინტეგრებადი ფუნქციისათვის-----	4
§2 ჰილბერტის გარდაქმნა $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, სივრცეში-----	10
ლიტერატურა-----	18

შესავალი

ჩვენ განვიხილავთ ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად შედეგს. კერძოდ, შევისწავლით ჯამებადი ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნის კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით თ.ყ. არსებობის საკითხს. როგორც წესი, ეს ზღვარი შეიძლება არ იყოს ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია. დამტკიცებას, რომელსაც აქ მოვიყვანთ, არის ნამდვილი ცვალდის ფუნქციათვის და ეს საშუალებას გვაძლევს ეს უკანასკნელი განვაზოგადოთ n -განზომილებიანი ევკლიდური სივრცისთვის.

§1. ჰილბერტის გარდაქმნის არსებობა ინტეგრებადი ფუნქციისათვის

თეორემა 1.1. ვთქვათ, $f \in L(T)$, მაშინ

$$(1.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(x-t)}{2 \tan(t/2)} dt$$

არსებობს თ.ყ. $x \in T$. $H_\varepsilon f(x)$ -ის ზღვარს უწოდებენ f ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნას და

(1.1) ტოლობა აღნიშნება

$$Hf(x) = p.v. -\frac{1}{\pi} \int_T \frac{f(x-t)}{2 \tan(t/2)} dt.$$

ზემოთ აღნიშნული ინტეგრალის მათავარი მნიშვნელობა ($p.v.$) გულისხმობს, სიმეტრიული მიდამოს „ამოღებას“ კოორდინატთა სათვიდან და შემდეგ ზღვარის განხილვას, ასეთი მიდგომა გამოწვეულია ნახვევი გულის სინგულარობით.

დამტკიცება. დამტკიცების გზა მდგომარეობს იმაში, რომ ვაჩვენოთ $p.v.$ ინტეგრალის არსებობა თ.ყ. იმ სიმრავლეთა მიმდევრობათა დამატებაზე, რომლის ზომა მიისწრაფის 0-სკენ. როგორც კი ეს იქნება მიღწეული, ცხადი იქნება, რომ ინტეგრალი იარსებებს ამ სიმრავლეების გაერთიანებაზეც, კერძოდ, T -ს სრული ზომის ქვესიმრავლეზე.

უპირველეს ყოვლისა ვიგულისხმობთ, რომ f არის არაუარყოფითი ფუნქცია. დავუშვათ, რომ λ არის ისეთ მუდმივი, რომ: $\lambda > |f|_T$, სადაც $|f|_T$ არის f -ის საშუალო T -ზე. მაშინ f ფუნქციის λ დონის კალდერონისა და ზიგმუნდის დეკომპოზიციის [1] გამოყენებით ვიღებთ T -ს ღია, თანაუკვეთ $\{I_j\}$ სიმრავლეებად დაყოფას და შესაბამის წარმოდგენას: $f = g + b$.

ცხადია, ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის, $H_\varepsilon f(x) = H_\varepsilon g(x) + H_\varepsilon b(x)$, $x \in T$. მეტიც, ვინაიდან $g \in L^2(T)$

(იხილეთ [1]), ამიტომ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon g(x) = \tilde{g}(x)$ არსებობს თ.ყ. T -ში. ვთქვათ,

$$\Omega^* = \cup 2I_j, |\Omega^*| \leq (2/\lambda) \int_T |f(y)| dy. \text{ დავუშვათ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ}$$

$$(1.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon b(x) \text{ არსებობს თ.ყ. } T \setminus \Omega^*,$$

მაშინ $\lambda_k \rightarrow \infty$ მიმდევრობის არჩევით, თუ $\{\Omega_k^*\}$ -თი აღვნიშნავთ შესაბამის ღია სიმრავლეების

მიმდევრობას, მაშინ (1.2)-ში $p.v.$ ინტეგრალი არსებობს შესაბამისი b -სათვის, თ.ყ. Ω_k^*

დამატებაში და იგივე მსჯელობა სამართლიანია f -ის შესაბამისი $p.v.$ ინტეგრალისთვისაც.

მაშასადამე, f ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნა არსებობს თ.ყ. $\cup_k (T \setminus \Omega_k^*)$ -ში, რომელიც არის T -ს სრული ზომის სიმრავლე.

დავუბრუნდეთ (1.2)-ის დამტკიცებას. საკმარისია ვაჩვენოთ რომ $\{H_\varepsilon b(x)\}$ არის კოშის მიმდევრობა თ.ყ. $T \setminus \Omega_k^*$ -ში, $\varepsilon \rightarrow 0$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$(1.3) \quad \lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| = 0 \quad \text{თ.ყ. } T \setminus \Omega^* \text{-ზე.}$$

(1.3) დამტკიცება დავყოთ ორ ნაწილად. პირველად ვაჩვენებთ, რომ

$$(1.4) \quad \limsup_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| < \infty \quad \text{თ.ყ. } T \setminus \Omega^* \text{-ზე}$$

და მას შემდეგ რაც დავადგენთ, რომ $\limsup$ არის სასრული, მე-2 ეტაპზე დასამტკიცებელი იქნება ამ ზღვრის 0-თან ტოლობა.

ფიქსირებული $\varepsilon > \eta > 0$ -სათვის, შვნიშნოთ რომ $H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)$ ტოლია

$$(1.5) \quad -\frac{1}{\pi} \left(\int_{[x-\varepsilon, x-\eta)} + \int_{[x+\eta, x+\varepsilon)} \right) \frac{b(t)}{2 \tan((x-t)/2)} dt.$$

ვინაიდან $b(t) = \sum_j b(t) \chi_{I_j}(t)$ და $x \notin I_j$ ყოველი j -სათვის, ჩვენ შეგვიძლია დავყოთ I_j ორ ოჯახად, კერძოდ, რომლებსაც თანაკვეთა აქვთ $[x-\varepsilon, x-\eta)$ და $(x+\eta, x+\varepsilon]$ ინტერვალებთან; ყველა სხვა ინტერვალები, რომლებიც არ მონაწილეობს (1.5)-ში შემავალ ინტეგრალებში, შეგვიძლია უგულებელვყოთ. რადგან თითოეული ოჯახისათვის არგუმენტი ერთი და იგივეა, ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ ისეთ I_j ინტეგრალებს, რომლებიც იკვეთებიან $(x+\eta, x+\varepsilon]$ ინტერვალთან. თავის მხვრივ, ასეთი ინტერვალები შეიძლება დავყოთ სამ ქვეოჯახად:

- (i) I_j შესაძლებელია შეიცავდეს $(x+\eta)$ -ს, ასეთები აღვნიშნოთ I_j'' -თი.
- (ii) I_j შესაძლებელია შეიცავდეს $(x+\varepsilon)$ -ს, ასეთები აღვნიშნოთ I_j^ε -თი.
- (iii) I_j მთლიანად მოთავსებულია $(x+\eta, x+\varepsilon]$ -ში; ამგვარი ინტერვალები აღვნიშნოთ კვლავ I_j -თი.

(1.5)-ზე ძირითადი გავლენა აქვს I_j -ზე გავრცელებულ ინტეგრალებს; სხვა წევრები წარმოადგენენ „უმნიშვნელო“ სიდიდეებს. განვიხილოთ ეს მოსაზრება უფრო ზუსტად.

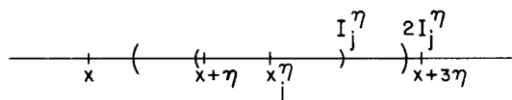
ვთქვათ, L_j'' არის I_j'' -ის სეგრძე, x_j'' არის I_j'' -ის ცენტრი. ავიღოთ

$$A_j^\eta = \int_{(x+\eta, x+\varepsilon] \cap I_j^\eta} \frac{b(t)}{2 \tan((x-t)/2)} dt.$$

ცხადია, სამარტლიანია შემდეგი ორი გეორეტრიული მოსაზრება:

(a) თუ $x \notin I_j^\eta$, მაშინ $\eta > L_j^\eta / 2$.

(b) $(x+\eta, x+\varepsilon] \cap I_j^\eta \subseteq (x+\eta, x+\eta+L_j^\eta) \subseteq (x+\eta, x+3\eta)$.



მაშინ

$$(1.6) \quad |A_j^\eta| \leq \int_{(x+\eta, x+3\eta)} \frac{|b(t)|}{2 |\tan((x-t)/2)|} dt.$$

ამის გარდა, ვინაიდან, $\tan u \sim \eta$, როცა $u \sim \eta$ და η არის მცირე, (1.6)-ის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მნიშვნელს აქვს c/η რიგი და აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(1.7) \quad |A_j^\eta| \leq \frac{c}{\eta} \int_{(x+\eta, x+3\eta)} |b(t)| dt = \frac{c}{\eta} \int_{(\eta, 3\eta)} |b(x+t)| dt \leq \frac{c}{\eta} \int_{(0, 3\eta)} |b(x+t)| dt.$$

ახლა $b(x) = 0$, როცა $x \in T \setminus \Omega^*$; ამიტომ საბოლოოდ (1.7) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$(1.8) \quad |A_j^\eta| \leq \frac{c}{3\eta} \int_{(0, 3\eta)} |b(x+t) - b(x)| dt.$$

თუ გავითვალისწინებთ დებულება 4.2-ს [1], მაშინ დავასკვნით, რომ (1.8) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს არის $o(1)$, როცა $\eta \rightarrow 0$, b -ს ყოველ ლებეგის x წერტილში, ანუ თ.ყ. T -ში. ამის მსგავსად,

$$(1.9) \quad |A_j^\varepsilon| \leq \frac{c}{3\varepsilon} \int_{(0, 3\varepsilon)} |b(x+t) - b(x)| dt = o(1) \quad \text{როცა } \varepsilon \rightarrow 0.$$

თ.ყ. T -ში. ამრიგად, ესენი წარმოადგენს „უმნიშვნელო“ წევრებს.

ძირითადი წევრის შესაფასებლად გამოვიყენოთ „ჩაქრობის“ თვისება $\int_{I_j} b(t) dt = 0$ და ეს

უკანასკნელი გადავწეროთ, ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ x_j წერტილი წარმოადგენს I_j ინტერვალის ცენტრს.

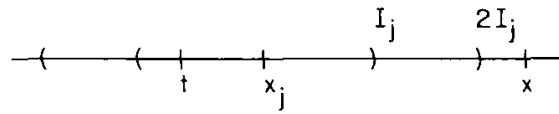
$$\begin{aligned}
(1.10) \quad A_j &= \int_{I_j} \frac{b(t)}{2 \tan((x-t)/2)} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{I_j} b(t) \left(\frac{1}{\tan((x-t)/2)} - \frac{1}{\tan((x-x_j)/2)} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{I_j} b(t) k(k, t, x_j) dt.
\end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ტრიგონომეტრიულ იგივეობებს, მივიღებთ:

$$(1.11) \quad k(x, t, x_j) = \frac{\sin((t-x_j)/2)}{\sin((x-t)/2) \sin((x-x_j)/2)}.$$

$k(x, t, x_j)$ -ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ გეომეტრიული მიდგომა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ თუ $t, x_j \in I_j$ და $x \notin 2I_j$, მაშინ

$$(1.12) \quad \frac{1}{3} \leq \frac{|x-t|}{|x-x_j|} \leq 3$$



მართლაც, ვინაიდან $L_j = I_j$ -ის სეგრძეს, მივიღებთ $|x-x_j| > L_j/2$, მაშინ ცხადია, $|x-t| \leq |x-x_j| + |x_j-t| \leq |x-x_j| + L_j \leq 3|x-x_j|$. თუ x_j და t შევუცვლით ადგილებს და შევნიშნავთ, რომ $|x-x_j| \leq 3|x-t|$, მაშინ ამ ორი შეფასების გაერთიანებით მივიღებთ (1.12) შეფასებას. უფრო მეტიც, ვინაიდან ზემოთ აღნიშნულ გამოსახულებებში საქმე გვაქვს მცირე სიდიდეებთან, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია სინუსი ჩავანაცვლოთ თავისივე არგუმენტით და ამიტომ (1.12) გათვალისწინებით გვექნება

$$(1.13) \quad |k(x, t, x_j)| \leq c \frac{|t-x_j|}{|x-t||x-x_j|} \leq c \frac{L_j}{|x-x_j|^2}.$$

ამრიგად, (1.10) და (1.13) გათვალისწინებით გვაქვს შეფასება

$$|A_j| \leq c \frac{L_j}{|x-x_j|^2} \int_{I_j} |b(t)| dt \leq c \frac{L_j}{|x-x_j|^2} \int_{I_j} |f(t)| dt,$$

სადაც c დამოუკიდებელია x -ზე და j -ზე. $[x-\varepsilon, x-\eta)$ ინტერვალისთვის მიღებული შეფასებების გაერთიანებით, საბოლოოდ თ.ყ. $x \in T \setminus \Omega^*$ -თვის გვაქვს

$$\begin{aligned}
(1.14) \quad & |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| \leq \\
& \leq c \sum_{j, I_j \cap ([x-\varepsilon, x-\eta] \cup (x+\eta, x+\varepsilon]) \neq \emptyset} \frac{L_j}{|x-x_j|^2} \int_{I_j} |f(t)| dt + o(\varepsilon) + o(\eta) = \\
& = L_{\varepsilon, \eta}(x).
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$(1.15) \quad \limsup_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| \leq \limsup_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} L_{\varepsilon, \eta}(x) = L(x).$$

(1.15)-ის გათვალისწინებით, (1.14) შეფასება სამართლიანი იქნება როგორც კი ვაჩვენებთ, რომ თ.ყ. $L(x) < \infty$. ამისათვის შემოვიღოთ $L(x)$ -ის მაქორანტი, მარცინკევიჩის $\Delta(f, x)$ რომელიც განსაზღვრულია $\Omega = \cup I_j$ -ზე შემდეგნაირად:

$$(1.16) \quad \Delta(f, x) = \sum_j \frac{L_j}{|x-x_j|^2} \int_{I_j} |f(t)| dt, \quad x \notin \Omega.$$

ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ

$$(1.17) \quad \Delta(f, x) < \infty, \quad \text{თ.ყ. } T \setminus \Omega^* \text{-ზე.}$$

ამის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია უფო ძლიერი შეფასება. კერძოდ,

$$(1.18) \quad I = \int_{T \setminus \Omega^*} \Delta(f, x) dx < \infty.$$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}
L_j \int_{T \setminus \Omega^*} \frac{1}{|x-x_j|^2} dx & \leq L_j \int_{T \setminus 2I_j} \frac{1}{|x-x_j|^2} dx \leq \\
& \leq L_j \int_{[L_j/2, \infty)} \frac{ds}{s^2} = c,
\end{aligned}$$

სადაც c დამოუკიდებელია j -ზე. ტონელის თეორემის გამოყენებით გვაქვს

$$(1.19) \quad I = \sum_j \left(\int_I |f(t)| dt \right) L_j \int_{T \setminus \Omega^*} \frac{1}{|x-x_j|^2} dx \leq c \int_\Omega |f(t)| dt.$$

ამრიგად, (1.18) სამართლიანია და ამით დასრულდა დამტკიცების პირველი ეტაპი.

ადვილი დასანახია, რომ (1.19)-დან და ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით [2] მივიღებთ

$$(1.20) \quad \lambda \left| \left\{ t \in T \setminus \Omega^* : \Delta(f, t) > \lambda \right\} \right| \leq c \int_\Omega |f(t)| dt.$$

ახლა დავრწმუნდეთ (1.3)-ის სამართლიანობაში. შევნიშნოთ, რომ

$$(1.21) \quad L(x) \leq c \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{L_j}{|x - x_j|^2} \int_{I_j} |f(t)| dt \quad \text{ყოველი } N \geq 0\text{-თვის.}$$

უკანასკნელი შეფასება სამართლიანია რადგან $x \in T \setminus \cup_{j=1}^N I_j$ ყოველი $N > 0$ -თვის, ამასთან ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია უგულვებელყოთ პირველი N ინტერვალი $\{I_j\}$ ოჯახიდან, როცა $\varepsilon, \eta > 0$ საკმარისად მცირეა (1.14)-ში. ამის გარდა, რადგან (1.21)-ის მარჯვენა მხარე არის თ.ყ. $x \in T \setminus \Omega^*$ -თვის კრებადი მწკრივის კუდი, ამიტომ $L(x) = 0$ ასეთი x -ებისათვის, გადავალთ რა (1.21)-ში ზღვარზე, როცა $N \rightarrow \infty$. ეს კი ნიშნავს, რომ სრულდება (1.3). ■

შენიშვნა 1.2. ჩვენ გამოვყოფთ ორ ფაქტს ზემოთ მოყვანილ დამტკიცებიდან. პირველი: თუ (1.14)-ში დავუშვებთ $\varepsilon = \pi$, მაშინ თ.ყ. $x \in T \setminus \Omega^*$ -თვის

$$(1.22) \quad \begin{aligned} |H_\eta b(x)| &\leq c\Delta(f, x) + \frac{c}{\eta} \int_{(x+\eta, x+3\eta)} |b(t)| dt + \frac{c}{\eta} \int_{(x-3\eta, x-\eta)} |b(t)| dt \leq, \\ &\leq c(\Delta(f, x) + Mb(x)), \quad \eta > 0, \end{aligned}$$

სადაც c არ არის დამოკიდებული η -ზე. მეორე: (1.14)-ში თუ კვლავ გადავალ ზღვარზე, ამჯერად, როცა $\eta \rightarrow 0$, მაშინ თ.ყ. $x \in T \setminus \Omega^*$ -თვის

$$(1.23) \quad |Hb(x)| \leq c\Delta(f, x).$$

§2. ჰილბერტის გარდაქმნა $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, სივრცეში.

მიუხედავად იმისა, რომ Hf ჰილბერტის გარდაქმნა კორექტულად არის განსაზღვრული ნებისმიერი $f \in L(T)$ ფუნქციისთვის, საზოგადოდ ის შეიძლება არ იყოს ინტეგრებადი. შემდეგი მაგალითით ამაში ადვილად დავრწმუნდებით: ვთქვათ, $f \in L(T)$ და არის დადებითი, ამასთან ის ნული ხდება $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ -ის გარეთ. მაშინ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ -თვის

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{f(t)}{2 \tan((x-t)/2)} dt.$$

რადგან $x < 0$ და $t > 0$, ამიტომ $\tan((x-t)/2) = -\tan((|x|+t)/2)$. ამრიგად,

$$\begin{aligned} (2.1) \quad Hf(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\left[0, \pi/2\right)} \frac{f(t)}{2 \tan((|x|+t)/2)} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_{\left[0, |x|\right]} \frac{f(t)}{2 \tan(|x|/2)} dt \geq \\ &\geq \frac{c}{\pi} \int_{\left[0, |x|\right]} f(t) dt. \end{aligned}$$

იმისათვის, რომ ეს ინტეგრალი გავხადოთ დიდი, საკმარისია ავიღოთ (იხილე [1], IV თავი, პარაგრაფი 2) $f(t) = d(1/\ln(1/t))/dt \geq 0$, მაშინ $f \in L(T)$ მაგრამ Hf არ არის ინტეგრებადი. მიუხედევად ამისა, ისევე როგორც ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური ფუნქციისათვის, ჩვენ ვიღებთ სუტი ტიპის შედეგს:

თეორმა 2.1. ვთქვათ, $f \in L(T)$, მაშინ ყოველი $0 < \varepsilon < \pi$ -თვის, არსებობს c მუდმოვი, რომელიც დამოუკიდებელია ε და f -ზე, ისეთი, რომ ყოველი $\lambda > 0$ -თვის

$$(2.2) \quad \lambda \left| \{ |H_\varepsilon f| > \lambda \} \right| \leq c \|f\|_1.$$

დამტკიცება. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda > \|f\|_1$; მაშინ კალდერონისა და ზიგმუნდის λ დონის დეკომპოზიციის ძალით (თეორემა 1.1-ის ტერმინებში) გვაქვს $f = g + b$. აგრეთვე, $x \in T \setminus \Omega^*$ -სათვის

$$(2.3) \quad H_\varepsilon f(x) = H_\varepsilon g(x) + H_\varepsilon b(x).$$

ამის გარდა, რადგან

$$(2.4) \quad \{|H_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \subseteq \Omega^* \cup \{x \in T \setminus \Omega^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\},$$

ამიტომ საკმარისია შევაფასოთ (2.4)-ში მარჯვენა მხარეში შემავალი თითოეული სიმრავლის ზომა. პირველ რიგში შევნიშნოთ

$$(2.5) \quad \Omega^* \leq 2 \sum |I_j| \leq 4\pi \|f\|_1 / \lambda,$$

ამასთან ეს შეფასება არის ზუსტი. ასევე (2.3)-დან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} & \{x \in T \setminus \Omega^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \subseteq \\ & \subseteq \{x \in T \setminus \Omega^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in T \setminus \Omega^* : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda/2\} = \\ & = I \cup J. \end{aligned}$$

I -ის შესაფასებლად ჩვენ გამოვიყენებთ L^2 -ის შედეგს $H_\varepsilon g$ -სთვის. ჩებიშევის უტოლობიდან, (6.2) და (3.7) გამოსახულებიდან (შესაზამისად, [1] -ის III და IV თავებიდან) მივიღებთ

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 |I| \leq \int_T |H_\varepsilon g(x)|^2 dx \leq c \|g\|_2^2 \leq c\lambda \|f\|_1,$$

საიდანაც

$$(2.6) \quad |I| \leq c \|f\|_1 / \lambda.$$

ეს წევრი, აგრეთვე, არის ზუსტი რიგის. რაც შეეხება J სიმრავლეს, (1.22) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ J ქვესიმრავლეა სიმრავლის

$$\begin{aligned} & \{x \in T \setminus \Omega^* : \Delta(f, x) > \lambda/4\} \cup \{x \in T \setminus \Omega^* : Mb(x) > \lambda/4\} \\ & = J_1 \cup J_2. \end{aligned}$$

(1.20) შეფასებიდან გვაქვს

$$(2.7) \quad |J_1| \leq c \|f\|_1 / \lambda.$$

მაქსიმალური თეორემისა და (3.9) შეფასებიდან (იხ. [1], თავი IV) მივიღებთ:

$$(2.8) \quad |J_2| \leq c \|b\|_1 / \lambda \leq c \|f\|_1 / \lambda.$$

ამრიგად (2.5)-(2.8) შეფასებებით და იმის გათვალისწინებით, რომ მუდმივები არ არის დამოკიდებული ε -სა და f -ზე, ვიღებთ თეორემის დამტკიცებას. ■

შევნიშნოთ, რომ $H_\varepsilon f(x)$, რომელიც წარმოადგენს ინტეგრებადი ფუნქციის ნახვევს, არის ჯამებადი ყოველი ε -სათვის, მიუხედავად ამისა, საზოგადოდ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|H_\varepsilon f(x)\|_1 = \infty$.

თეორემა 2.1-ის დამტკიცების მსჯელობის ანალოგიურად შეიძლება დავასკვნათ, რომ სამართლიანია

თეორემა 2.2 (კოლმოგოროვი). ვთქვათ, $f \in L(T)$, მაშინ არსებობს მუდმივი c , რომელიც არ არის დამოკიდებული f -ზე, ისეთი რომ, ყოველი $\lambda > 0$

$$(2.9) \quad \lambda \left| \{ |Hf| > \lambda \} \right| \leq c \|f\|_1.$$

დამტკიცება. გამოვიყენებთ შეფასება (1.23) და დამტკიცება იდენტურია თეორემა 2.1-ის, ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში არ გვაქვს J_2 წევრი. ■

გადავიდეთ L^p -ს განხილვაზე. პირველ რიგში განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $1 < p < 2$, L^2 და სუსტი (1,1) ტიპის შეფასებებიდან, მოსალოდნელია შედეგების ადვილად მიღება.

თეორემა 2.3. ვთქვათ, $f \in L^p(T)$, $1 < p < 2$, მაშინ არსებობს მუდმივი $c_p = O(1/(p-1))$, რომელიც არ არის დამოკიდებული ε -სა და f -ზე, ისეთი რომ

$$(2.10) \quad \|H_\varepsilon f\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

თეორემა 2.4 (მ. რისი). ვთქვათ $f \in L^p(T)$, $1 < p < 2$. მაშინ არსებობს მუდმივი $c_p = O(1/(p-1))$, რომელიც არ არის დამოკიდებული f -ზე, ისეთი რომ

$$(2.11) \quad \|Hf\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

ამის გარდა, თ.ყ. $Hf(x) = \tilde{f}(x)$. ამრიგად, $L^p(T)$ კლასის შეუღლებული ფუნქციები კვლავ $L^p(T)$ კლასშია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $1/p = (1-\eta) + \eta/2$, $0 < \eta < 1$, მაშინ თეორემა 4.1-ს გამოყენებით ([1], თავი IV), აქ $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, H არის შემოსაზღვრული ასახვა L^p -ში ნორმით $O(1/(p-1)^{(1-\eta)})$.

ამის გარდა, ვინაიდან $(p-1)^\eta \leq 1$ და მიისწრაფვის 1-კენ, როცა $p \rightarrow 1$, ამიტომ $c_p = O(1/(p-1))$.

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ თ.ყ., განვიხილოთ $H(f - \sigma_n(f))(x)$. რადგან $\sigma_n(f) \in L^2(T)$, ამიტომ $H(f - \sigma_n(f))(x) = Hf(x) - \tilde{\sigma}_n(f, x)$ თითქმის ყველგან. ახლა (2.11)-ის ძალით

$$(2.12) \quad \|Hf - \tilde{\sigma}_n(f)\|_p \leq c_p \|f - \sigma_n(f)\|_p.$$

ამ უკანასკნელში c_p არ არის დამოკიდებული n -ზე. მაგრამ ფეიერის 2.7 თეორემის თანახმად (იხ. [1], თავი II) (2.12)-ის მარჯვენა მხარე მიისწრაფის 0-სკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. მაშასადამე, მარცხენა მხარეც მიისწრაფის 0-სკენ. ამრიგად, დებულება 1.1-ის (იხ. [1], თავი I) თანახმად გვაქვს:

$$c_j(Hf) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_j(\tilde{\sigma}(f)), \text{ ყოველი } j\text{-სათვის.}$$

უფრო მეტიც, ვინაიდან

$$c_j(\tilde{\sigma}(f)) = \begin{cases} (1 - |j|/(n+1))(-i)(\operatorname{sgn} j)c_j(f), & \text{როცა } |j| \leq n, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases}$$

ამიტომ მაშინვე ვასკვნით, რომ ზემოთ განხილული ზღვარი არის $(-i)(\operatorname{sgn} j)c_j(f)$; აქედან გამომდინარეობს, რომ $\tilde{f} = Hf(x) \in L^p(T)$. ■

განსახილველია შემთხვევა, როცა $2 < p \leq \infty$. როცა $p = \infty$ ჩვენ არ გვაქვს ცალსახა პასუხი. ეს იმიტომ, რომ $f \in L^\infty(T)$ პირობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ჩართვა: $Hf \in L^\infty(T)$, ამაში ადვილად დავწრმუნდებით ქვემოთ მოყვანილ 2.7 ლემამაში განხილული მაგალითით. სანამ განვიხილავდეთ ამ უარყოფით შედეგებს, ჯერ შევისწავლოთ დადებითი შედეგები $2 < p < \infty$ შემთხვევებისათვის. ისინი მაშინვე მიიღებინა „დუალური“ არგუმენტების გამოყენებით.

თეორემა 2.5. ვთქვათ, $f \in L^p(T)$, $2 < p < \infty$. მაშინ არსებობს ისეთი მუდმივი $c_p = O(p)$, რომელიც არ არის დამოკიდებული ε -სა და f -ზე, რომ

$$(2.13) \quad \|H_\varepsilon f\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

თეორემა 2.6. ვთქვათ, $f \in L^p(T)$, $2 < p < \infty$. მაშინ არსებობს ისეთი მუდმივი $c_p = O(p)$, რომელიც არ არის დამოკიდებული f -ზე, რომ

$$(2.14) \quad \|Hf\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

ამის გარდა, თ.ე. $Hf = \tilde{f}(x)$. მაშასადამე, $L^p(T)$ კლასის შეუღლებული ფუნქციები კვლავ $L^p(T)$ კლასშია.

თეორემა 2.6-ის დამტკიცება. რადგან $L^p \subset L^2$, ამიტომ $Hf = \tilde{f} \in L^2(T)$ (იხ. [1], თავი III, მე-6 პარაგრაფი). დაგვრჩა დასამტკიცებელი, რომ $Hf \in L^p(T)$. თეორემა 3.3-ის (იხ. [1], თავი II) გათვალისწინებით საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$(2.15) \quad \|\sigma_n(\tilde{f})\|_p \leq c_p \|f\|_p,$$

სადაც c_p არ არის დამოკიდებული n -სა და f -ზე. ამის მიღწევა არ არის რთული. მართლაც, ვთქვათ, g არის ტრიგონომეტრიული პოლინომი თვისებით $\|g\|_{p'} \leq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. მაშინ პარსევალის უტოლობის გამოყენებით ვიღებთ

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_T \sigma_n(\tilde{f}, t) \overline{g(t)} dt = \sum_{|j| \leq n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) (-i)(\operatorname{sgn} j) c_j(f) \overline{c_j(g)} = \\ &= - \sum_{|j| \leq n} c_j(f) \overline{\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) (-i)(\operatorname{sgn} j) c_j(g)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) \sigma_n(\tilde{g}, t) dt. \end{aligned}$$

ჰელდერის უტოლობით და თეორემა 2.4-ის გამოყენებით, გვაქვს:

$$|I| = \|\sigma_n(\tilde{g})\|_{p'} \|f\|_p \leq c_{p'} \|f\|_p.$$

(2.15) გამომდინარეობს ჰელდერის საპირისპირო უტოლობით, როცა c_p -ს ჩავანაცვლებთ $c_{p'}$ -თი. ეს უმნიშვნელო ცვლილებაა, ვინაიდან $p = p'/(p'-1)$, p' არის 1-თან ახლოს და $c_{p'} = O(1/(p'-1))$, მაშინ $c_{p'} = c_p = O(p)$. ■

შენიშვნა 2.7. თეორემა 2.6.-ში c_p მუდმივის რიგი არის ზუსტი. მართლაც, ვთქვათ,

$f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, მაშინ ცხადია, რომ $\|f\|_p = 1$, ყოველი $p \geq 1$ -თვის,

$Hf(x) = c(\ln|\sin(x/2)| - \ln|\sin((1-x)/2)|)$ და

$$(2.16) \quad \|Hf\|_p \geq c \left(\int_{[0,1]} |\ln x|^p dx \right)^{1/p} = c \left(\int_{[0,\infty]} s^p e^{-s} ds \right)^{1/p} \geq c \Gamma(p+1)^{1/p},$$

სადაც $\Gamma(p+1)$ არის p რიგის გამა ფუნქცია. (2.16)-დან ცნობილი შეფასების ძალით $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|Hf\|_p / p \geq c > 0$. მიუხედავად, იმისა რომ Hf არ არის შემოსაზღვრული, $Hf \in \cap_{p < \infty} L^p$, Hf არის ექსპონენციალურად ინტეგრებადი და მისი ზრდის რიგი ლოგარიტმულია. ჰილბერტის გარდაქმნის ყველა ეს თვისება ნარჩუნდება, როცა ფუნქცია არის L^∞ კლასიდან.

დებულება 2.8. ვთქვათ, $f \in L^p(T)$, $1 < p < \infty$, მაშინ $\|S_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$.

დამტკიცება. ვინაიდან $\tilde{s}_n(f) - \tilde{f} = (s_n(f) - f)^-$, $\|\tilde{s}_n(f) - \tilde{f}\|_p \leq c_p \|s_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. ■

იმისათვის რომ დავასრულოდ $p = 1$ შემთხვევის განხილვა, ვაჩვენოთ, რომ

დებულება 2.9. ვთქვათ, $f \in L(T)$ და $0 < p < 1$. მაშინ $\|Hf\|_p \leq c_p \|f\|_1$, $c_p = O(1/(1-p))$, რომელიც არ არის დამოკიდებული f -ზე. იგივე შეფასება სრულდება H_ε -თვის, სადაც c_p კვლავ არ არის დამოკიდებული ε -ზე.

დამტკიცება. ვინაიდან $Hf \in wk - L(T)$, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დებულება 7.5 (იხ. [1], თავი IV); ამჯერად ვგულისხმობთ $\alpha = p$ და $\beta = 1 - p$. შევნიშნოთ, რომ კონსტანტას აქვს ზუსტი რიგი. ■

პირველი შედეგი, რაც მივიღეთ იყო $\|H_\varepsilon f - Hf\|_2 \rightarrow 0$ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ბუნებრივია ველოდოთ, მსგავსი შედეგების მიღებას L^p ნორმისათვისაც, $1 < p < \infty$; როგორებიც იყო $p = 1$ -სათვის. ამაში მალევე დავრწმუნდებით.

დებულება 2.10. ვთქვათ $f \in L^p(T)$, $1 < p < \infty$, მაშინ

$$(2.17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|H_\varepsilon f - Hf\|_p = 0.$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $f \in L^p(T)$ -თვის ავიღოთ g ტრიგონომეტრიული პოლინომი ისეთი, რომ $\|f - g\|_p \leq \eta$ - საკმარისად მცირე. მაშინ მინკოვსის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \|H_\varepsilon f - Hf\|_p &\leq \|H_\varepsilon f - Hg\|_p + \|H_\varepsilon g - Hg\|_p + \|Hg - Hf\|_p \leq \\ &\leq c_p \|f - g\|_p + \|H_\varepsilon g - Hg\|_p + c_p \|f - g\|_p \leq \\ &\leq 2c_p \eta + \|H_\varepsilon g - Hg\|_p. \end{aligned}$$

მაშასადამე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|H_\varepsilon g - Hg\|_p = 0$. ვინაიდან g არის ტრიგონომეტრიული პოლინომი, დამტკიცება გამომდირეობს დებულება 6.4.-დან (იხ. [1], თავი III). ■

დებულება 2.11. ვთქვათ, $f \in L(T)$, მაშინ

$$(2.18) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f = Hf \text{ ზომით}$$

და

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|H_\varepsilon f - Hf\|_p = 0, \quad 0 < p < 1.$$

დამტკიცება. L^p -კრებადობა უშუალოდ გამომდინარეობს, როგორც ზემოთ, (2.18) -დან ■

წაკვეთილი ჰილბერტის გარდაქმნა, ისევე როგორც თვითონ ჰილბერტის გარდაქმნა თანაბრად იმართება „მაქსიმალური ჰილბერტის გარდაქმნით“. ის განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$(2.19) \quad H^* f(x) = \sup_{0 < \varepsilon < \pi} |H_\varepsilon f(x)|.$$

H^* თვისებები ანალოგიურია H -ისა. ამაში ადვილად დაგვარწმუნებს შემდეგი ორი დებულება.

თეორემა 2.12 ვთქვათ, $f \in L^p(T)$, $1 < p < \infty$, მაშინ არსებობს f -სგან დამოუკიდებელი მუდმივი c ისეთი, რომ

$$(2.20) \quad H^* f(x) \leq c(Mf(x) + M(Hf(x))).$$

მაშასადამე $\|H^* f\|_p \leq c_p \|f\|_p$ სადაც $c_p = O(1/(p-1)^2)$, როცა $p \rightarrow 1^+$ და $c_p = O(p)$, როცა $p \rightarrow \infty$.

დამტკიცება. $H_\varepsilon f$ -ს ადვილად შევავსებთ როცა $\varepsilon \geq 1$. გვაქვს

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{1 < |x-t| < \pi} \frac{|f(t)|}{2 \tan((x-t)/2)} dt \leq \\ &\leq c \int_T |f(t)| dt \leq c Mf(x). \end{aligned}$$

თუ $0 < \varepsilon < 1$ და n ისეთი მთელი რიცხვია, რომ $1/(n+1) \leq \varepsilon < 1/n$, მაშინ

$$\begin{aligned} H_\varepsilon f(x) &= (H_\varepsilon f(x) - H_{1/n} f(x)) + (H_{1/n} f(x) - \tilde{\sigma}_n(f, x)) + \tilde{\sigma}_n(f, x) = \\ &= I + J + K. \end{aligned}$$

მაშინ $|H_\varepsilon f(x)| \leq |I| + |J| + |K|$ და საკმარისია შევავსოთ თითოეული წევრი ცალ-ცალკე. დავიწყეთ $|I|$ -დან. თუ $\sup$ -ს ავიღებთ n -ის მიმართ (6.8)-ში (იხ. [1], თავი III, შედეგი 6.4), მივიღებთ: $|I| \leq c Mf(x)$. იგივე არის სამართლიანი $|J|$ -თვის, თუ გავითვალისწინებთ (6.6), (6.7) შეფასებებს თეორემა 6.3 -ში (იხ. [1], თავი III); მივიღებთ რომ $|I|$ და $|J|$ წევრები არ აღემატება $c Mf(x)$ -ს. $|K|$ -ს შეფასებისათვის გამოვიყენებთ დებულება 2.3-ს (იხ. [1], თავი IV). მივიღებთ შეფასებას $|K| \leq c M(Hf)(x)$ და, მაშასადამე, სრულდება 2.20-ს. c_p -ს ზრდის რიგის ნორმით შეფასებას, მაშინვე მივიღებთ (2.20)-დან. ■

ჩვენ, ასევე, გვაქვს სუსტი ტიპის შეფასება, როცა f არის უბრალოდ ინტეგრებადი.

თეორემა 2.13. ვთქვათ $f \in L(T)$, მაშინ $H^* f \in wk - L(T)$ და არსებობს ისეთი მუდმივი C , რომელიც არ არის დამოკიდებული f -ზე და

$$(2.21) \quad \lambda |\{H^* f > \lambda\}| \leq c \|f\|_1, \quad \text{ყოველი } \lambda > 0.$$

დამტკიცება. კალდერონისა და ზიგმუნდის λ დონის დეკომპოზიციის გამოყენებით ვიღებთ $f = g + b$, $\Omega^* = \cup 2I_j$, ამრიგად

$$(2.22) \quad H^* f(x) \leq H^* g(x) + H^* b(x)$$

და საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$(2.23) \quad \lambda |\{H^* g > \lambda/2\}| \leq c \|f\|_1$$

და

$$(2.24) \quad \lambda |\{x \in T \setminus \Omega^* : H^* b(x) > \lambda/2\}| \leq c \|f\|_1$$

თეორემა 2.13 -ის გამოყენებით გვაქვს $\|H^* g\|_2 \leq c \|g\|_2 \leq c \lambda \|f\|_1$. (2.23) გამომდინარეობს ჩებიშევის უტოლობით. ამის გარდა, (1.22) შეფასების ძალით (იხ. შენიშვნა 1.2) მივიღებთ $H^* b(x) \leq c(\Delta f(x) + Mb(x))$, $x \in T \setminus \Omega^*$. თუ გავითვალისწინებთ 1.2 შეფასებას და იმ ფაქტს, რომ მაქსიმალური ოპერატორი არის სუსტი (1,1) ტიპის და $\|b\|_1 \leq c \|f\|_1$, მივიღებთ (2.24)-ს. ■

ლიტერატურა

- [1] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. ACADEMIC PRESS, INC. (1986).
- [2] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа. Издательство “Наука “ Главная Редакция Физико-Математической Литературы, Москва (1976).